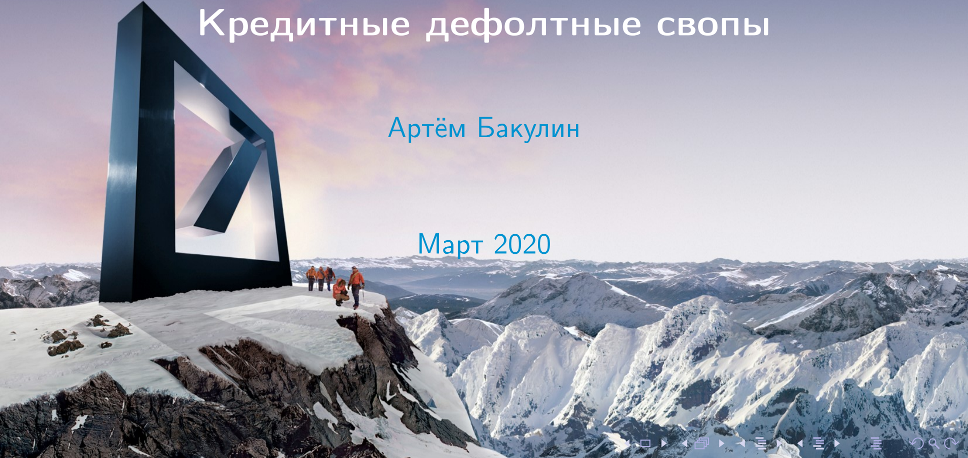
Deutsche Bank
Technology Center

Математические модели в инвестиционных банках
Кредитные дефолтные свопы

Артём Бакулин

Март 2020



Кредитный дефолтный своп

Кредитный дефолтный своп (Credit default swap, CDS) — производный финансовый инструмент, позволяющий купить или продать страховку от дефолта по облигациям или другим долгам.

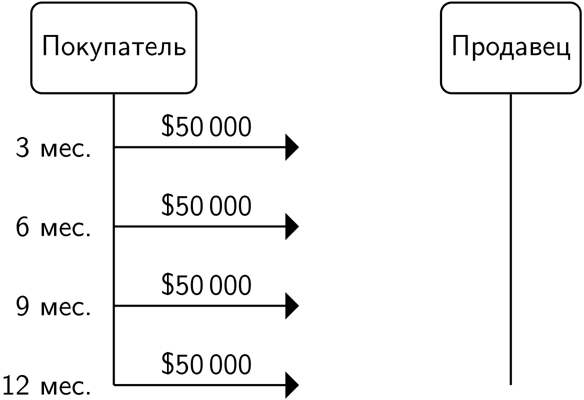
Важные параметры сделки:

- Базовый заёмщик (reference entity).
- Застрахованный номинал.
- Дата начала и окончания действия страховки.
- Фиксированный купон («спрэд») — процент от номинала, который покупатель выплачивает продавцу.

«Купить» CDS — согласится платить фиксированный купон в обмен на страховку.

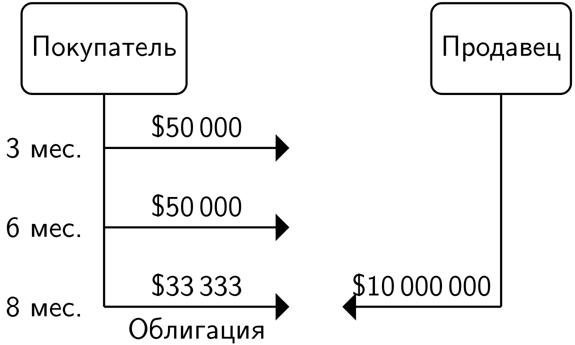
Кредитный дефолтный своп

Пример: CDS сроком на 1 год, с номиналом \$10 000 000 и купоном 2.0% годовых.



Кредитный дефолтный своп

Референсный заёмщик объявил дефолт через 8 месяцев.



Две разновидности CDS:

- Поставочный (облигация в обмен на номинал).
- Расчётный (продавец выплачивает разницу между номиналом и рыночной ценой облигации).

Применение

Хэджирование кредитного риска. Зачастую купить CDS оказывается проще и быстрее, чем продать неликвидную облигацию из портфеля. Когда рынок успокоится, можно продать ставший ненужным CDS.

Спекуляция на кредитном риске.

- Покупаем CDS, если считаем, что кредитное качество референсного заёмщика будет ухудшаться.
- Продаём CDS, если считаем, что вероятность дефолта меньше, чем считает рынок.

Нужно ли владеть облигацией, чтобы купить страховку на неё? Нет! Такая позиция называется «naked CDS»*.

* В Европе запрещены naked CDS на государственные облигации членов ЕС.

Факторы, влияющие на цену CDS

На честную цену CDS влияют следующие факторы:

- Вероятность дефолта референсного заёмщика. Её можно вычислить либо из котировок других CDS, либо из рыночных цен облигаций этого заёмщика.
- Recovery rate — остаточная стоимость облигации в случае дефолта. Обычно вычисляется на основе исторических данных о дефолтах заёмщиков в той же юрисдикции, в том же секторе экономики, с сопоставимым кредитным рейтингом.
- Ставка дисконтирования будущих платежей.

Recovery rate

Moody's Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2010.

Position	2010	2009	1982-2010
1st Lien Bank Loan	72.30%	56.30%	59.60%
2nd Lien Bank Loan	18.40%	20.80%	27.90%
Sr. Unsecured Bank Loan	n.a.	37.90%	39.90%
Sr. Secured Bond	54.70%	29.60%	49.10%
Sr. Unsecured Bond	63.80%	35.50%	37.40%
Sr. Subordinated Bond	39.40%	18.00%	25.30%
Subordinated Bond	32.20%	25.10%	24.20%
Jr. Subordinated Bond	n.a.	n.a.	17.10%

Правило большого пальца: 40%.

Вероятность дефолта и цена облигации

Государственная (безрисковая) бескупонная облигация с погашением через 1 год стоит $G = 98\%$ номинала. Корпоративная облигация на 1 год стоит $C = 95\%$ номинала. В случае дефолта recovery rate составит $R = 40\%$. Какую вероятность дефолта p ожидают участники рынка?

		Дефолт (p)		Нет дефолта ($1-p$)	
Облигация	Цена	Выплата	Дох-ть	Выплата	Дох-ть
Гос.	G	1	1/G -1	1	1/G - 1
Корп.	C	R	R/C - 1	1	1/C - 1

Математические ожидания доходностей должны совпадать:

$$\frac{1}{G} - 1 = p\left(\frac{R}{C} - 1\right) + (1-p)\left(\frac{1}{C} - 1\right) \Rightarrow$$

$$p = \frac{1 - C/G}{1 - R} = \frac{1 - 0.95/0.98}{1 - 0.4} \approx 5.1\%$$

Вероятность дефолта и доходность облигации

Формулу вероятности дефолта можно переписать в терминах доходностей безкупонных облигаций r_g и r_c. Если T — количество лет до погашения, то

$$G = \frac{1}{(1+r_g)^T}, C = \frac{1}{(1+r_c)^T}$$

Тогда

$$p = \frac{1-\frac{C}{G}}{1-R} = \frac{1-\frac{(1+r_g)^T}{(1+r_c)^T}}{1-R}$$

(В предположении, что при дефолте мы получим остаточную стоимость облигации в ту же дату, в которую должны были получить номинал)

Вероятность дефолта и кредитный спред

Если процентные ставки не очень высоки, то формулу можно упростить до:

$$p = \frac{1 - \dfrac{(1+r_g)^T}{(1+r_c)^T}}{1-R} \approx \frac{T(r_c - r_g)}{1-R}$$

Например, доходность годовой облигации одного крупного немецкого банка из Франкфурта составляет 1.10%. Доходность аналогичной облигации Германии составляет -0.55%. При банкротстве банка кредиторы могут рассчитывать на recovery rate 40%. Какова вероятность дефолта этого банка в течение года?

$$p \approx \frac{r_{Bank} - r_{Germany}}{1-R} = \frac{1.10\% - (-0.55\%)}{1-40\%} = 2.75\%$$

Интерполяция вероятности дефолта

Пусть из цен однолетней и двухлетней облигаций следует, что компания разорится за $T_1 = 1$ год с вероятностью $PD(T_1) = 2\%$ и за $T_2 = 2$ года с вероятностью $PD(T_2) = 5\%$. Какова вероятность того, что компания разорится в течение $T^* = 1.5$ лет $PD(T^*)$?

Предположим, что если компания выжила в первый год, то на неё начинает действовать экспоненциальное распределение с параметром λ. А именно, вероятность дожить до момента T $S(T)$ вычисляется как:

$$1 - PD(T) = S(T) = S(T_1)e^{-\lambda(T-T_1)}$$

Откуда взять значение λ?

Интерполяция вероятности дефолта

Значение λ можно вычислить из значений $PD(T_1)$ и $PD(T_2)$.

$1 - PD(T_2) = S(T_2) = S(T_1)e^{-\lambda(T_2 - T_1)} = (1 - PD(T_1))e^{-\lambda(T_2 - T_1)}$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{\ln\left(\frac{1 - PD(T_1)}{1 - PD(T_2)}\right)}{T_2 - T_1}$$

В нашем случае, $\lambda \approx 3.11\%$. Тогда

$PD(1.5) = 1 - S(1.5) = 1 - (1 - PD(1))e^{-3.11\% \cdot (1.5 - 1)} \approx 3.51\%$

Интенсивность дефолта

Функция $\lambda(t)$ называется функцией интенсивности дефолта, если вероятность дефолта к моменту времени $t + dt$ при условии отсутствия дефолта к моменту t равна

$$P(D(t+dt)|ND(t)) = \lambda(t)dt$$

Другое название — hazard rate.

Вероятность выживания к моменту времени T:

$$P(S(T)) = e^{-\int_0^T \lambda(x)dx}$$

Если функция — константа ($\lambda(t) = \lambda$), то вероятности выживания и дефолта к моменту T вычисляются как

$$P(S(T)) = e^{-\lambda T}, P(D(T)) = 1 - e^{-\lambda T}$$

Интенсивность дефолта

Год	$\lambda = 1\%$	$\lambda = 2\%$	$\lambda = 3\%$	$\lambda = 4\%$	$\lambda = 5\%$
1	1.00%	1.98%	2.96%	3.92%	4.88%
2	1.98%	3.92%	5.82%	7.69%	9.52%
3	2.96%	5.82%	8.61%	11.31%	13.93%
4	3.92%	7.69%	11.31%	14.79%	18.13%
5	4.88%	9.52%	13.93%	18.13%	22.12%
10	9.52%	18.13%	25.92%	32.97%	39.35%
15	13.93%	25.92%	36.24%	45.12%	52.76%
20	18.13%	32.97%	45.12%	55.07%	63.21%
30	25.92%	45.12%	59.34%	69.88%	77.69%

Прайсинг CDS

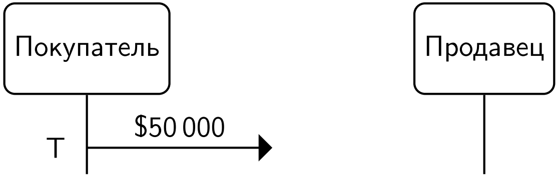
Предположим, что мы знаем вероятность дефолта, recovery rate, и коэффициенты дисконтирования. Как посчитать честную цену CDS?

Математические ожидания дисконтированных платежей продавца и покупателя должны совпадать. Для каждой даты в будущем необходимо рассчитать:

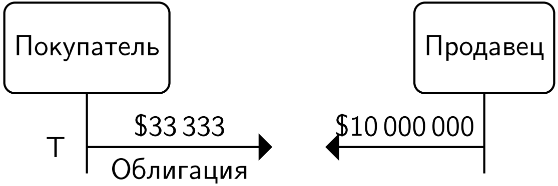
- Вероятность, что эмитент доживёт до этой даты $S(T)$.
- Вероятность, что эмитент разорится именно в эту дату $PD(T) - PD(T - 1 \text{ день})$.

Прайсинг CDS

С вероятностью $S(T)$ покупатель выплачивает купон, если T — одна из дат выплат купона.



С вероятностью $PD(T) - PD(T - 1 \text{ день})$ покупатель платит накопленный купон и остаточную стоимость облигации, а продавец выплачивает застрахованный номинал.



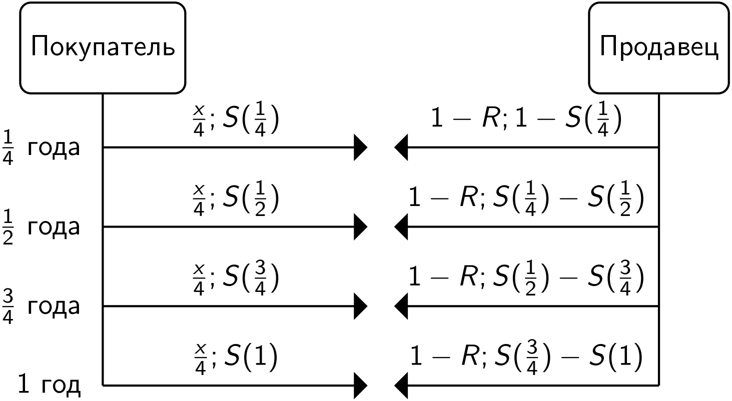
Пример задачи на экзамене

Оцените справедливую стоимость (купон) кредитного свопа со следующими параметрами.

- Срок 1 год.
- Выплата купона раз в квартал (1/4 года).
- Recovery Rate 40%.
- Вероятность дефолта задана экспоненциальным распределением с параметром $\lambda = 2\%$.
- При дефолте выплата страховки произойдёт в дату следующего купона.
- Дисконтированием пренебречь.

Решение

Пусть x — годовой купон в кредитном свопе с застрахованным номиналом 1 и recovery rate R. Пусть $S(t)$ — вероятность того, что референсный заёмщик доживёт до момента t лет. Распишем платежи покупателя и продавца и вероятности каждого платежа.



Решение

Математическое ожидание суммы платежей покупателя равно математическому ожиданию суммы платежей продавца.

$$\frac{x}{4}\cdot\left(S\left(\frac{1}{4}\right)+S\left(\frac{1}{2}\right)+S\left(\frac{3}{4}\right)+S\left(1\right)\right)=(1-R)(1-S(1))$$

По условию задачи, $S(t)=e^{-\lambda t}$, поэтому

$$x=\frac{4(1-R)(1-e^{-\lambda})}{e^{-\lambda/4}+e^{-\lambda/2}+e^{-3\lambda/4}+e^{-\lambda}}$$

Подставляя $R=0.4$ и $\lambda=0.02$, получим:

$$\frac{4(1-0.4)(1-e^{-0.02})}{e^{-0.02/4}+e^{-0.02/2}+e^{-3\cdot 0.02/4}+e^{-0.02}}\approx 1.203\%$$

Решение (второй способ)

Референсный эмитент доживёт до момента 1 год с вероятностью $S(1) = e^{-\lambda \cdot 1} \approx 1 - \lambda = 0.98$.

Другими словами, дефолт случится в течение года с вероятностью $\approx 2\%$. Если дефолт произойдёт, то ваши потери составят $1 - R = 0.6$ или 60%.

Сколько вы готовы заплатить за страховку от события, которое произойдёт с вероятностью 2% и причинит вам убыток в 60% инвестированного номинала? Конечно $2\% \cdot 60\% = 1.2\%$!

Демонстрация

Риск-нейтральная и реальная вероятности

Насколько точны рыночные оценки вероятности дефолта?

Не особо. Рынок почти всегда переоценивает вероятность дефолта. Компании разоряются реже, чем можно было бы предполагать, глядя на рыночные котировки.

В нашей модели все инвесторы риск-нейтральные, то есть их интересует только математическое ожидание доходности, и не интересует риск (дисперсия). Риск-нейтральному инвестору всё равно: получить \$100 наверняка, или с вероятностью 50/50 получить либо \$0, либо \$200.

Правда ли, что Homo Sapiens риск-нейтральны? Нет!

Риск-нейтральная и реальная вероятности

Люди, принимающие инвестиционные решения, избегают риска (являются risk-averse), и это влияет на рынок облигаций и CDS.

- Покупателей рискованных облигаций не устраивает математическое ожидание доходности, равное доходности безрисковых бумаг. Они требуют премию за риск (risk premium), которая компенсирует дискомфорт от рискованной инвестиции. Выше доходность — ниже цена облигаций.
- Покупатели CDS боятся потерь от дефолта, поэтому они готовы платить бОльшую премию за страховку, чем сферические риск-нейтральные инвесторы. Больше спрос — выше цена CDS.

Риск-нейтральная и реальная вероятности

Кроме того, мы не знаем, какую recovery rate участники рынка закладывают в цены. Не существует ликвидных деривативов (каких-нибудь recovery rate swap), которые позволяли бы разделить recovery rate и вероятность дефолта.

Означает ли это, что нельзя использовать наши вероятности для оценки CDS? Нет!

Во-первых, если у нас есть ликвидные рыночные инструменты, мы всегда можем захэджироваться и устранить неопределённость относительно вероятности дефолта.
Во-вторых, в формулу цены CDS входит только произведение (1-RecoveryRate) и вероятности, и нам почти никогда не нужно знать их по отдельности.

Реформа рынка в 2009 г.

В начале 2009 года регуляторы провели реформу рынка кредитных деривативов, чтобы избежать повторения кризиса 2008 года.

- Обязательный централизованный клиринг.
- 4 стандартных даты выплаты купонов: 20 марта, 20 июня, 20 сентября, 20 декабря.
- Фиксированные купоны либо по 1% (облигации с высоким рейтингом), либо по 5% (мусорные облигации).

Все по-прежнему котируют CDS в терминах спреда (например, 2.40%/2.41%), но реальные купоны всё равно будут либо 1%, либо 5%. Одна из сторон сделки выплачивает другой сумму, рассчитанную по стандартной методологии, чтобы компенсировать разницу в купоне.

Wrong Way CDS

Что бы Вы сказали о следующих сделках?

- Купить CDS на Германию у Deutsche Bank.
- Купить CDS на Deutsche Bank у сегодняшнего лектора.

Страховка надёжна ровно настолько, насколько надёжен её продавец, который тоже может разориться. Важно, чтобы дефолт референсного эмитента не имел корреляции с дефолтом продавца страховки.

Загадка: кто и у кого покупает CDS на гос. долг США?

Если всего этого мало

Index CDS:

- 100 компаний-заемщиков.
- Начальный номинал \$10 000 000.
- При дефолте каждой компании номинал (и купон) уменьшается на \$100 000.

Nth-to-default CDS:

- 100 компаний-заёмщиков
- Начальный номинал \$10 000 000.
- После первых N дефолтов выплачивается полный номинал.

Оценка зависит не только от вероятностей дефолта, но и от корреляций между дефолтами. Подробности в учебнике Hull.

Зачем?

Кредитные деривативы — это не только огромный рынок, но и важный компонент цены других деривативов:

- Credit valuation adjustment (CVA)
- Debt valuation adjustment (DVA)
- Capital valuation adjustment (KVA)

Домашнее задание (Python)

Используйте информацию о доходностях государственных облигаций США или Германии и любого другого эмитента (например, правительства России или Италии), чтобы вычислить ожидаемые вероятности дефолта.

Используя полученные вероятности, вычислите справедливую цену кредитного дефолтного свопа с заданным сроком и Recovery Rate.

Убедитесь, что безрисковые облигации и облигации рискованного эмитента номинированы в одной и той же валюте!

Домашнее задание (Python)

Пример исходных данных (`www.worldgovernmentbonds.com`):

Maturity	Germany	France	Portugal	Italy
1Y	-0.647%	-0.580%	-0.520%	-0.162%
2Y	-0.640%	-0.638%	-0.548%	0.025%
3Y	-0.660%	-0.607%	-0.354%	0.071%
5Y	-0.609%	-0.441%	-0.110%	0.569%
7Y	-0.536%	-0.292%	0.167%	0.920%
10Y	-0.366%	-0.053%	0.396%	1.347%
20Y	-0.087%	0.420%	0.976%	2.021%
30Y	0.117%	0.729%	1.312%	2.370%

Disclaimer

Данный материал не является предложением или предоставлением какой-либо услуги. Данный материал предназначен исключительно для информационных и иллюстративных целей и не предназначен для распространения в рекламных целях. Любой анализ третьих сторон не предполагает какого-либо одобрения или рекомендации. Мнения, выраженные в данном материале, являются актуальными на текущий момент, появляются только в этом материале и могут быть изменены без предварительного уведомления. Эта информация предоставляется с пониманием того, что в отношении материала, предоставленного здесь, вы будете принимать самостоятельное решение в отношении любых действий в связи с настоящим материалом, и это решение является основанным на вашем собственном суждении, и что вы способны понять и оценить последствия этих действий. ООО "Дойче Банк ТехЦентр"не несет никакой ответственности за любые убытки любого рода, относящихся к этому материалу.