



# Математические модели в инвестиционных банках Коническая оптимизация для управления портфелем

Алексей Ахметшин  
Михаил Андреев

13 марта 2020

# План лекции

- Основное уравнение теория ценообразования (Asset Pricing Theory).
- Факторные модели риска.
- Постановка задач конической оптимизации для управления портфелем акций.
- Разбор задач – python / CVXOPT

# Теория ценообразования (Asset Pricing Theory)

| Время (time)           | $t$ (сегодня)             | $t + 1$ (завтра)                      |
|------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
| Цена (price)           | $p_t$                     |                                       |
| Прибыль (payoff)       |                           | $x_{t+1}$                             |
| Потребитель (consumer) | $c_t = e_t$               | $c_{t+1} = e_{t+1}$                   |
| Инвестор (investor)    | $c_t = e_t - N \cdot p_t$ | $c_{t+1} = e_{t+1} + N \cdot x_{t+1}$ |
| Полезность (utility)   | $u(c_t)$                  | $u(c_{t+1})$                          |

## Оптимизация полезности (utility optimization problem)

$$\mathcal{U} = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \longrightarrow \max$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N} = 0 \quad \implies \quad u'(c_t) \cdot (-p_t) + \beta E_t[u'(c_{t+1})x_{t+1}] = 0$$

# Теория ценообразования (Asset Pricing Theory)

| Время (time)           | $t$ (сегодня)             | $t + 1$ (завтра)                      |
|------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
| Цена (price)           | $p_t$                     |                                       |
| Прибыль (payoff)       |                           | $x_{t+1}$                             |
| Потребитель (consumer) | $c_t = e_t$               | $c_{t+1} = e_{t+1}$                   |
| Инвестор (investor)    | $c_t = e_t - N \cdot p_t$ | $c_{t+1} = e_{t+1} + N \cdot x_{t+1}$ |
| Полезность (utility)   | $u(c_t)$                  | $u(c_{t+1})$                          |

## Оптимизация полезности (utility optimization problem)

$$\mathcal{U} = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \longrightarrow \max$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial N} = 0 \quad \implies \quad u'(c_t) \cdot (-p_t) + \beta E_t[u'(c_{t+1})x_{t+1}] = 0$$

# Уравнение установления цен (The Pricing Equation)

Стохастический коэффициент дисконтирования  
(stochastic discount factor, SDF)

$$\mathcal{U} \longrightarrow \max \implies p_t = \mathbb{E}_t \left[ \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1} \right]$$

$$p_t = \mathbb{E}_t[m_{t+1}x_{t+1}]$$

Безрисковый инструмент (no uncertainty)

$$x_{t+1} = p_t \cdot R_f \implies p_t = \frac{1}{R_f} x_{t+1}$$

Рисковый инструмент (risky asset)

$$p_t^i = \frac{1}{R^i} \mathbb{E}_t[x_{t+1}^i]$$

## Системный (systematic) и уникальный (idiosyncratic) риск

Цена = приведенная текущая стоимость + плата за риск  
Price = discounted present-value + risk adjustment

$$\left. \begin{aligned} p &= E[mx] \\ \text{Cov}(m, x) &= E[mx] - E[m]E[x] \\ R_f &= \frac{1}{E[m]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = \frac{E[x]}{R_f} + \text{Cov}(m, x)$$

Избыточная доходность (excess return) инструмента

$$E[x] - R_f = -R_f \text{Cov}(m, x)$$

$$x = \text{proj}_m x + \varepsilon, \quad \text{proj}_m x = \frac{E[mx]}{E[m^2]} m, \quad \text{Cov}(m, \varepsilon) = 0.$$

# Системный (systematic) и уникальный (idiosyncratic) риск

Цена = приведенная текущая стоимость + плата за риск  
Price = discounted present-value + risk adjustment

$$\left. \begin{aligned} p &= E[mx] \\ \text{Cov}(m, x) &= E[mx] - E[m]E[x] \\ R_f &= \frac{1}{E[m]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = \frac{E[x]}{R_f} + \text{Cov}(m, x)$$

Избыточная доходность (excess return) инструмента

$$E[x] - R_f = -R_f \text{Cov}(m, x)$$

$$x = \text{proj}_m x + \varepsilon, \quad \text{proj}_m x = \frac{E[mx]}{E[m^2]} m, \quad \text{Cov}(m, \varepsilon) = 0.$$

# Многофакторные модели риска (Factor Risk Models)

SDF = линейная комбинация “простых” факторов

$$m_{t+1} = a + b^T f_{t+1}$$

1964, Шарп (Sharpe): модель CAPM

Один фактор:  $m_{t+1} = a + bR_{t+1}^w$ , где  $R^w$  – доходность “портфеля благосостояния” (wealth portfolio return).

1976, Росс (Ross): арбитражная теория ценообразования (Arbitrage Pricing Theory, APT)

$$R^i = a^i + b_1^i f_1 + b_2^i f_2 + \dots + b_K^i f_K + \delta^i$$

$$E[\delta^i] = 0$$

$$\text{Cov}(\delta^i, f_k) = 0$$

# Современные модели риска для портфеля из $N$ акций

Доходность акции = системная + уникальная  
Stock excess returns = factor returns + specific returns

$$r^i = \sum_{k=1}^K A_{ik} f_k + \delta_i$$

- $K \ll N$ ;
- $\text{Cov}(f_k, \delta_j) = 0$  for all  $k, j$ .
- $\text{Cov}(\delta_i, \delta_j) = 0$  for all  $i, j$ .

Доходность портфеля  $\Pi$  = взвешенная сумма доходностей

$$r^{\Pi} = \sum_{i=1}^N w_i r_i = \sum_{k=1}^K A_k^{\Pi} f_k + \sum_{i=1}^N w_i \delta_i, \quad A_k^{\Pi} = \sum_{i=1}^N w_i A_{ki}.$$

$$\text{Var}(r^{\Pi}) = \sum_{k,l=1}^K A_k^{\Pi} A_l^{\Pi} \text{Cov}(f_k, f_l) + \sum_{i=1}^N w_i^2 \text{Var}(\delta_i)$$

# Риск портфеля (Portfolio Risk)

## Векторные обозначения

|          |                                                                           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------|
| $N$      | число рассматриваемых инструментов в модели                               |
| $K$      | число факторов                                                            |
| $B$      | $K \times K$ матрица ковариации факторов, $B_{ij} = \text{Cov}(f_i, f_j)$ |
| $A$      | $K \times N$ матрица зависимости от факторов (factor loadings)            |
| $D$      | $N \times N$ диагональная матрица $D_{ii} = \text{Var}(\delta_i)$         |
| $\Sigma$ | $N \times N$ матрица ковариации инструментов                              |
| $w$      | вектор позиций по инструментам портфеля $\Pi$                             |

$$\Sigma = A^T B A + D$$

$$\text{Var}(r^\Pi) = w^T \Sigma w, \quad \sigma(r^\Pi) = \sqrt{w^T \Sigma w}.$$

# Корень из матрицы ковариации инструментов

## Разложение Холецкого (Cholesky factorization)

Для симметрической положительно определенной матрицы  $B$  найдется верхне-треугольная матрица  $U$  такая, что верно

$$B = U^T U$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} I & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}$$

Положим

$$G = \begin{bmatrix} D^{1/2} & \\ & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{1/2} \\ UA \end{bmatrix} \implies \Sigma = G^T G \implies$$

$$\left(\sigma^\Pi\right)^2 = w^T G^T G w \implies \sigma^\Pi = \|Gw\|_2,$$

# Выбор оптимального портфеля

## Обозначения

|           |                                                           |
|-----------|-----------------------------------------------------------|
| $\alpha$  | вектор ожидаемых доходностей (return signals, aka alphas) |
| $\lambda$ | “неприятие риска” (portfolio-wide risk-aversion)          |

## Задачи

- 1 Максимизировать доходность для данного уровня риска.

$$U(w) = \alpha^T w \rightarrow \max, \text{ s.t. } \sigma(w) \leq L_2$$

- 2 Минимизировать риск для данного уровня доходности.

$$U(w) = \sigma(w) \rightarrow \min, \text{ s.t. } \alpha^T w \geq L_1$$

- 3 Найти эффективный портфель со средним отклонением (Markowitz mean-variance optimization).

$$U(w) = -\alpha^T w + \lambda \sigma(w) \rightarrow \min, \text{ s.t. } e^T w = 1.$$

# Оптимальная ребалансировка портфеля

|                |                                                                                               |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w$            | вектор начальных позиций портфеля                                                             |
| $x = \Delta w$ | вектор ребалансировки (изменения позиций)                                                     |
| $TC(x)$        | ожидаемые транзакционные издержки<br>(estimated transaction costs as function of $\Delta w$ ) |
| $H$            | матрица принадлежности инструментов к отраслям                                                |

## Модифицированная оптимизация Марковица

$$\mathcal{U}(x) = \lambda \sigma(w + x) - \alpha^T(w + x) + TC(x) \longrightarrow \min$$

## Дополнительные условия

|       |                                |                             |
|-------|--------------------------------|-----------------------------|
| (C1)  | $m_i^- \leq w_i + x_i < m_i^+$ | лимит по инструменту        |
| (C2)  | $\sum  w_i + x_i  < G$         | лимит по капиталу (gross)   |
| (C3)  | $\sum  x_i  < L$               | лимит по обороту (turnover) |
| (C4a) | $h^- \leq H(w + x) \leq h^+$   | отраслевые лимиты чистые    |
| (C4b) | $[H(w + x)]^\pm \leq g^\pm$    | ...длинные/короткие         |

# Коническая оптимизация в пакете CVXOPT

## Линейное коническое программирование

$$c^T x \longrightarrow \min$$

$$Gx + s = h$$

$$Ax = b$$

$$s \in \mathcal{C} = C_0 \times C_1 \times \dots \times C_M \times \dots \times C_{M+N}$$

## Квадратичное коническое программирование

$$\frac{1}{2}x^T Px + q^T x \longrightarrow \min$$

$$Gx + s = h$$

$$Ax = b$$

$$s \in \mathcal{C} = C_0 \times C_1 \times \dots \times C_M \times \dots \times C_{M+N}$$

# Квадратичное коническое программирование (SOCP)

## Прямая задача

$$c^T x \longrightarrow \min$$

$$G_0 x + s_0 = h_0, \quad s_0 \succeq 0$$

$$G_j x + s_j = h_j, \quad s_j = (s_j^0, s_j^1), \quad s_j^0 \geq \|s_j^1\|_2, \quad j = 1, \dots, q$$

$$Ax = b$$

## Двойственная задача

$$-\sum_{j=0}^q h_j^T z_j - b^T y \longrightarrow \max$$

$$\sum_{j=0}^q G_j^T z_j + A^T y + c = 0,$$

$$z_0 \succeq 0$$

$$z_j = (z_j^0, z_j^1), \quad z_j^0 \geq \|z_j^1\|_2, \quad j = 1, \dots, q$$

# Квадратичное коническое программирование (SOCP)

<http://cvxopt.org/userguide/coneprog.html#second-order-cone-programming>

# Задачи выбора портфеля в формате SOCP

1. Максимизировать доходность для данного уровня риска.

$$\mathcal{U}(w) = \alpha^T w \longrightarrow \max, \text{ s.t. } \sigma(w) \leq L_2, e^T w = 1.$$

# Задачи выбора портфеля в формате SOCP

2. Минимизировать риск для данного уровня доходности.

$$\mathcal{U}(w) = \sigma(w) \longrightarrow \min, \text{ s.t. } \alpha^T w \geq L_1, e^T w = 1.$$

# Задачи выбора портфеля в формате SOCP

## 3. Оптимизация Марковица

$$\mathcal{U}(w) = -\alpha^T w + \lambda \sigma(w) \longrightarrow \min, \text{ s.t. } e^T w = 1.$$

# Что читать дальше?

## Литература

- *Asset Pricing* by John H. Cochrane
- *Robust Portfolio Optimization and Management* by Frank J. Fabozzi and others.
- *Lectures on Modern Convex Optimization* by Aharon Ben-Tal and Arkadi Nemirovski.

## Ссылки

- <http://cvxopt.org>
- <http://docs.mosek.com/whitepapers/portfolio.pdf>