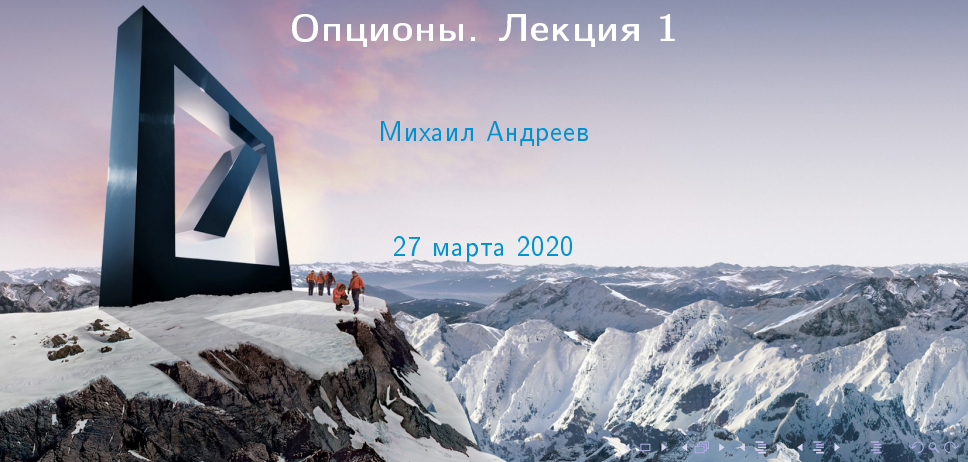




Математические модели в инвестиционных банках Опционы. Лекция 1

Михаил Андреев

27 марта 2020



Что такое опцион?



Опционы

это класс производных финансовых инструментов.

Термин "производный" (derivative) означает, что выплата по такому контракту зависит от цены на некоторый базовый актив (underlying).

Основной тип опциона это европейский опцион.

European option / vanilla option

Что такое опцион?



Европейский опцион

это контракт, по которому покупатель получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу какого-то базового актива по заранее оговорённой цене в определённый договором момент в будущем.

Покупатель опциона получает по контракту **право** совершить покупку или продажу базового актива. Это long сторона контракта. При этом продавец (short position) опциона несет **обязательство** продажи/покупки актива на оговоренных в контракте условиях.



- тип опциона: Европейский, ...
- сторона опционного контракта : long / buy / holder или short / sell / writer
- право на покупку или продажу : **call** или **put**
- **strike**
- **expiry date** (maturity date)

Зачем нужен опцион?



FX опцион это как КАСКО, только опцион

FX опцион может использоваться как страховка для финансового планирования в компании где расходы и прибыль в разных валютах. Т.е. производство и продажи в разных странах.

Зачем нужен опцион?



Buy side: Как инструмент для построения спекулятивных стратегий

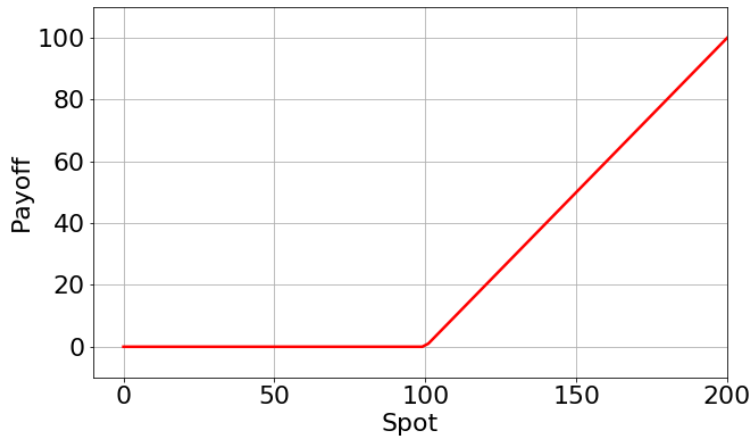
- спекуляция на курсе underlying
- появляются новые новые варианты для стратегий - торговля волатильностью

Sell side: Market maker

European option payoff at expiration : long call



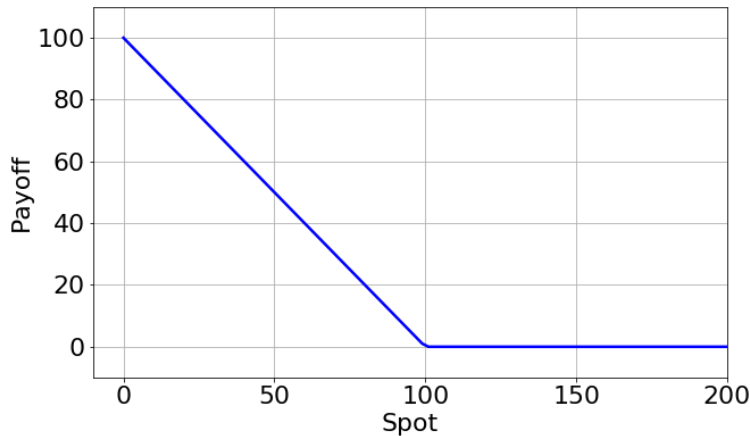
$$\text{Payoff} = \max(0, S_T - K)$$



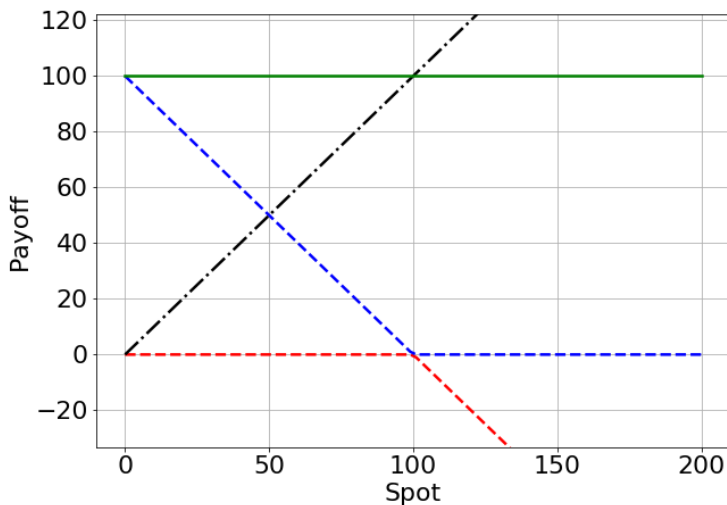
European option payoff at expiration : long put



$$\text{Payoff} = \max(0, K - S_T)$$



Long Put + Short Call + Spot at expiration date





$$P - C + S = D \cdot K$$

Где D - коэффициент дисконтирования.

Другая форма, используя цену форварда $F = D^{-1} \cdot S$

$$C - P = D(F - K)$$

Мы будем использовать дисконтирование в непрерывном времени.

$$C - P = S - e^{-r(T-t)} \cdot K$$

где $0 \leq t \leq T$



Важные свойства

- Никаких предположений для моделирования поведения цены underlying.
- Возможность исключить риск (неопределенность) путем составления комбинации нетривиальных инструментов. Perfect static hedge.
- Это соотношение можно рассматривать как **репликацию** одного инструмента (например пут опциона) через другие.

Как построить мат модель для прайсинга опциона?



Цена underlying

Главный фактор это риск, связанный с неопределенностью будущей цены на underlying.

Изменение цены underlying моделируется как стохастический процесс.

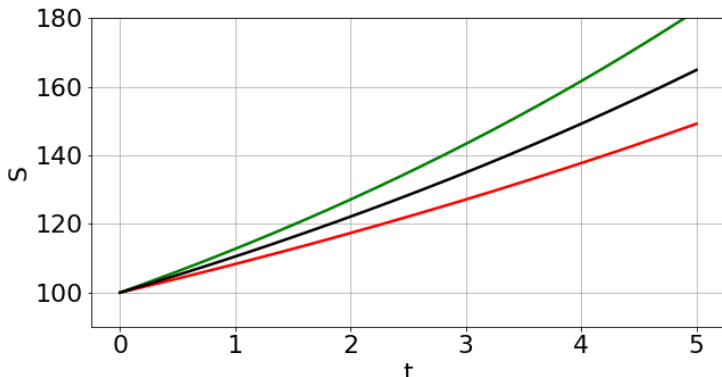


Rate Of Return

В непрерывном времени $\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t$ в пределе дает

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \implies S = \exp(\mu t)$$

Безрисковая ставка r задает базовый уровень.



Идея дифференциального уравнения



Без случайности

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dS}{S} = \mu dt$$

Хотим добавить случайность:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \text{шум}$$



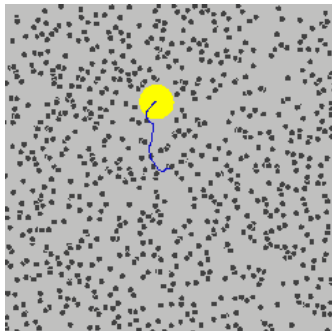
Некоторые считают, что броуновское движение названо в честь английского физика по фамилии Броун.



Некоторые считают, что броуновское движение названо в честь английского физика по фамилии Броун.

На самом деле оно названо в честь шотландского ботаника по имени Robert Brown.

Броуновское движение: наблюдение частицы в микроскоп



wikimedia.org : Brownian motion

Robert Brown (1828). "A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies"

"Краткий отчет о **наблюдениях в микроскоп**, сделанных в июне, июле и августе 1827 года **над частицами, содержащимися в пыльце растений**; и о существовании активных молекул в органических и неорганических телах"



- Каждое ΔW это сумма большого кол-ва i.i.d. случайных факторов $\Rightarrow$ (по центральной предельной теореме)
 $\Delta W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Т.к. нет выделенного направления, то $E(W(t)) = 0$.
 $\Rightarrow \mu = 0$.
- $\sigma^2 = \text{Var}(W_{t+s} - W_t) = s$

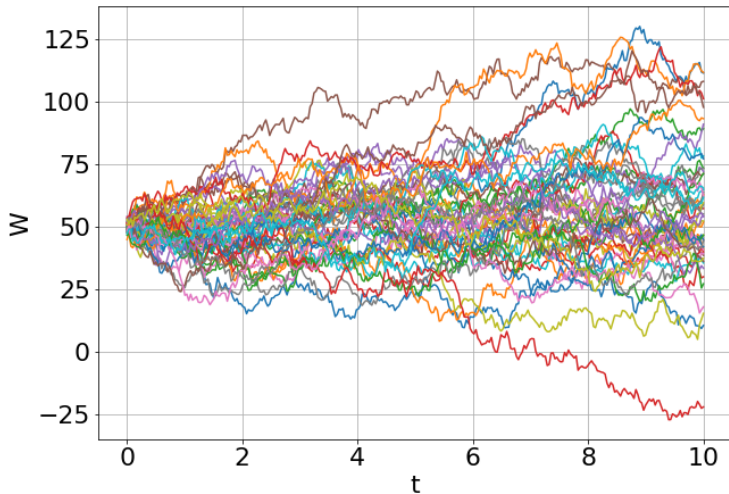


- Непрерывное время (t)
- $W(t)$ непрерывна, $W(0) = 0$
- Изменения на непересекающихся промежутках времени - независимы
- $W_{t+s} - W_t \sim \mathcal{N}(0, s)$

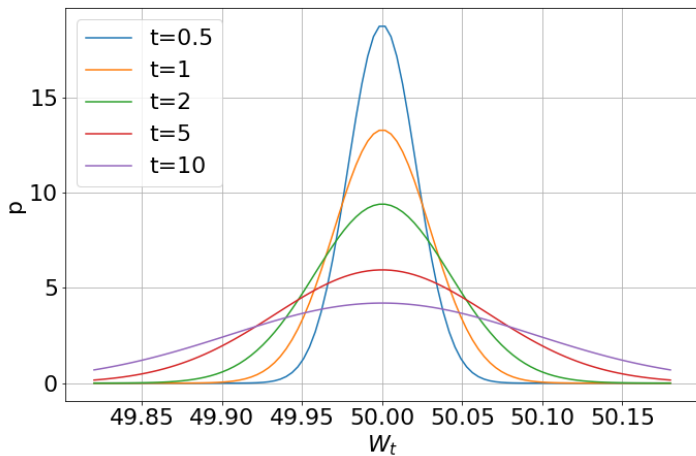


Сумма независимых случайных величин.

Броуновское движение / Винеровский процесс



$$W_0 = 50; \sigma = 10; n = 50$$



Попытка построить дифференциальное уравнение



Без случайности

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dS}{S} = \mu dt$$

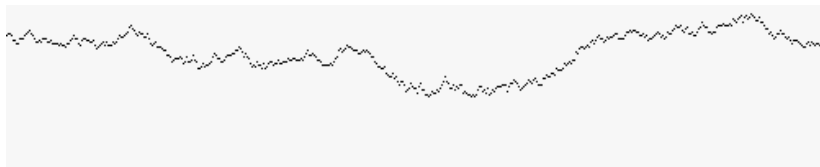
Хотим добавить случайность:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

Проблема с dW .



Реализация винеровского процесса во всех точках непрерывная и не дифференцируемая.



ru.wikipedia.org/wiki/Файл:Wiener_process_animated.gif



Если $x(t)$ такая, что:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW_t$$

То для $f(x, t)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2$$

$$dt^2 = 0; dt dW_t = 0; dW_t^2 = dt$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b^2(x, t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$



$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$$

μ — drift, σ — volatility

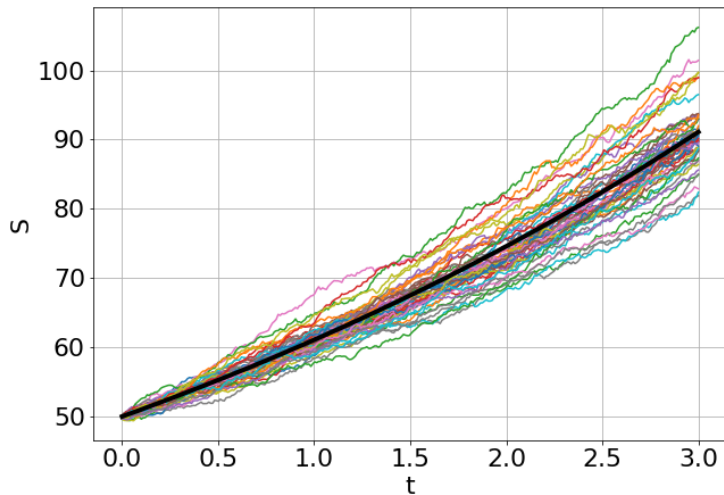
$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t$$

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$$

$$S(t) = S_0 e^{\mu t} \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

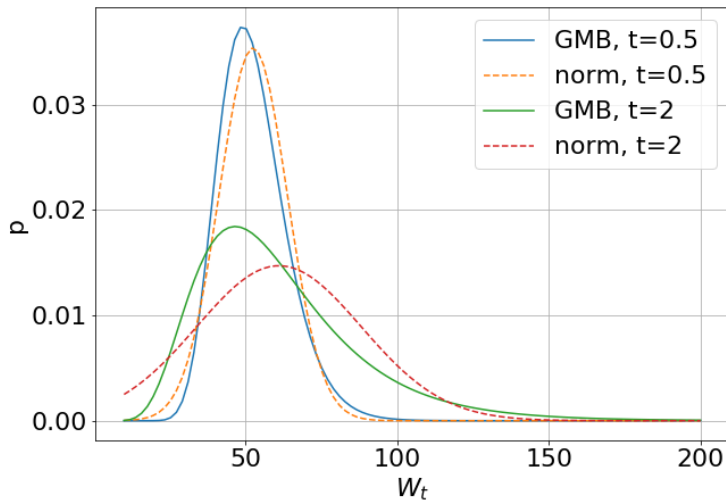
$$\mathbb{E}[S(t)] = S_0 e^{\mu t}$$

Геометрическое броуновское движение



$n = 50$

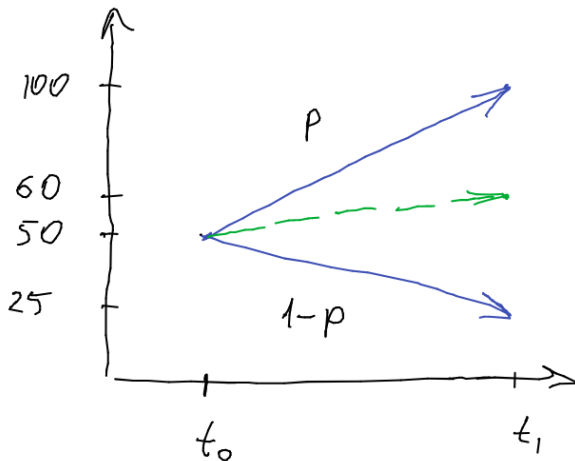
Геометрическое броуновское движение





- 1828 Robert Brown
- 1900 Louis Bachelier
- 1905 Albert Einstein / Marian Smoluchowski
- 1920s Norbert Wiener
- 1940s - 50s Kiyosi Itô
- 1973 Fischer Black, Myron Scholes; Robert C. Merton

Одношаговая биномиальная модель: Пример с цифрами



Одношаговая биномиальная модель: Пример с цифрами



Рассмотрим в таком мире опцион C . Если бы мы имели гарантированную выплату в момент времени t_1 , то для мы бы просто дисконтировали этот платеж на время t_0 и получили бы справедливую цену такого контракта.

Предположение: (?) $C_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [D_1 C_1]$

$$C_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [D_1 C_1] = \sum_{i=1}^n D_1(C_1)_i p_i = D_1 C_u p + D_1 C_d (1 - p)$$

для случая страйка $K = 70$

$$C_0 = \frac{1}{1.2} 30 \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} 0 \frac{1}{2} = 12.5$$

Одношаговая биномиальная модель: Пример с цифрами



		$t = t_0$ $S_0 = 50$	$t = t_1$ $S_1 = 25$	$S_1 = 100$
Продать	C	+15C ₀	0	-15 · 30 = -450
Купить	S	-6 · 50	+6 · 25 = 150	+6 · 100 = 600
Взять в долг	\$	+125	-150	-150
			<u>0</u>	<u>0</u>
		0 ←	0	

$$d_1 = \frac{1}{1.2}$$

$$K = 70$$

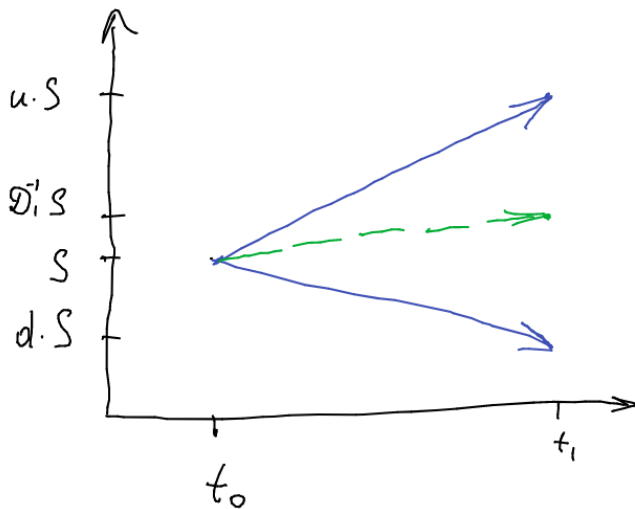
$$\Rightarrow C_0 = \frac{6 \cdot 50 - 125}{15} \approx 11.66$$

Одношаговая биномиальная модель: Пример с цифрами



- Самофинансируемая стратегия
- Мы пренебрегаем накладными расходами и такой "мелочью" как наличие спреда
- Принципиально важно условие отсутствия арбитража
- Замечание о дробных номеналах
- В нашей стратегии только два независимых параметра

Одношаговая биномиальная модель: Пример с формулами



Одношаговая биномиальная модель: Пример с формулами



		$t = t_0$	$t = t_1$	
		$S_0 = S$	$S_1 = d \cdot S$	$S_1 = u \cdot S$
Продать	C	$+ C$	$- C_d$	$- C_u$
Купить	$x S$	$- x S$	$+ x \cdot d \cdot S$	$+ x \cdot u \cdot S$
Взять в долг	$D_1 y$	$+ D_1 y$	$- y$	$- y$
			$? \frac{\quad}{0}$	$? \frac{\quad}{0}$

Одношаговая биномиальная модель: Риск нейтральная мера



$$\begin{cases} x = \frac{C_u - C_d}{S_0(u - d)} \\ y = \frac{dC_u - uC_d}{u - d} \end{cases}$$

Значит мы можем написать для начального момента времени:

$$C_0 - xS_0 + D_1y = 0$$

$$C_0 = D_1 C_u \frac{D_1^{-1} - d}{u - d} + D_1 C_d \frac{u - D_1^{-1}}{u - d} = D_1 C_u q + D_1 C_d (1 - q)$$

Где $q = \frac{D_1^{-1} - d}{u - d}$. Если мы введем еще $D_0 = 1$, то мы можем записать следующее:

$$D_0 C_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D_1 C_1]$$

Одношаговая биномиальная модель: Риск нейтральная мера



Давайте еще попробуем посчитать следующее:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D_1 S_1] &= \\&= D_1 S_u q + D_1 S_d (1 - q) = S D_1 u \frac{D_1^{-1} - d}{u - d} + S D_1 d \frac{u - D_1^{-1}}{u - d} \\&= S \frac{u - D_1 u d + D_1 u d - d}{u - d} = S = D_0 S_0\end{aligned}$$

Т.е.

$$D_0 S_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D_1 S_1]$$



$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

- Ω – множество элементарных событий
- $\mathcal{F}$ – σ -алгебра подмножеств Ω
- $\mathbb{P}$ – вероятностная мера.



Самофинансируемая стратегия π реализует арбитражную возможность (в момент времени N), если при нулевом начальном капитале $X_0^\pi = 0$ ее капитал в момент времени N : $X_N^\pi \geq 0$ (P - п.н.) и $P(X_N^\pi > 0) > 0$



$$\mathbb{P} \sim \tilde{\mathbb{P}} : \mathbb{P}(A) = 0 \iff \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0$$



Первая фундаментальная теорема теории расчетов финансовых активов / The First Fundamental Asset Pricing Theorem

Если рынок безарбитражный, то существует (хотя бы одна) мера $\mathbb{Q}$, эквивалентная мере $\mathbb{P}$, т.ч.:

$$E^{\mathbb{Q}}[D_t^r S_t] = D_0^r S_0$$

$$(D_0^r = 1)$$

$\mathbb{Q}$ называется **риск-нейтральной** (risk-neutral) или **мартингальной** мерой.



В 'real-world' мере $\mathbb{P}$:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

$$D_t = e^{-rt}$$

Отсюда для дисконтированной цены $D_t S_t$:

$$d(D_t S_t) = (\mu - r) D_t S_t dt + \sigma D_t S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

Можно показать (используя теорему Гирсанова), что в риск-нейтральной мере $\mathbb{Q}$:

$$d(D_t S_t) = \sigma D_t S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Т.е.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$S(t) = S(0) \exp\left(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}\right)$$



Если рынок является безарбитражным и полным то существует только одна мартингальная мера. (Вторая фундаментальная теорема)

$$E^{\mathbb{Q}}[D_T C_T] = D_0 C_0$$



Метод Монте-Карло - численное интегрирование.

$$C_0 = E^{\mathbb{Q}}[D_T C_T] = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} \max(0, S_T - K)\right]$$

Где C_t - цена call опциона на актив S_t .

$$S(t) = S(t - \Delta t) \exp\left(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}\right)$$

$$S(0) = S_0$$

Случай актива, который выплачивает дивиденды



доход от владения активом S :

$$Se^{qt}$$

Характерный пример: опцион на курс валют (FX option).

Как нужно модифицировать?

- Put-Call parity
- уравнение GBM для актива

Put-Call parity with $q \neq 0$



$$C - P = Se^{-q\tau} - Ke^{-r\tau}$$



$$C_0 = E^{\mathbb{Q}}[D_T C_T] = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} \max(0, S_T - K)\right]$$

$$S(t) = S(t - \Delta t) \exp\left((rt - qt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}})\right)$$

"The Greeks". Индикаторы риска



V : текущая цена опциона

Название	Определение
Delta	$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$
Gamma	$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
Theta	$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$
Vega	$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$
Rho	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

Обратная связь по лекции

<https://anketolog.ru/s/343716/N4nk4hbO>



Данный материал не является предложением или предоставлением какой-либо услуги. Данный материал предназначен исключительно для информационных и иллюстративных целей и не предназначен для распространения в рекламных целях. Любой анализ третьих сторон не предполагает какого-либо одобрения или рекомендации. Мнения, выраженные в данном материале, являются актуальными на текущий момент, появляются только в этом материале и могут быть изменены без предварительного уведомления. Эта информация предоставляется с пониманием того, что в отношении материала, предоставленного здесь, вы будете принимать самостоятельное решение в отношении любых действий в связи с настоящим материалом, и это решение является основанным на вашем собственном суждении, и что вы способны понять и оценить последствия этих действий. ООО "Дойче Банк ТехЦентр" не несет никакой ответственности за любые убытки любого рода, относящихся к этому материалу.