



Математические модели в инвестиционных банках Опционы. Лекция 2

Михаил Андреев

3 апреля 2020





Moneyiness

- out-of-the-money
- at-the-money
- in-the-money

Intrinsic / time value

Option Value = Intrinsic Value + Time Value



Метод Монте-Карло - численное интегрирование.

$$C_0 = E^{\mathbb{Q}}[D_T C_T] = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} \max(0, S_T - K)\right]$$

Где C_t - цена call опциона на актив S_t .

$$dS = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$S(t) = S(t - \Delta t) \exp\left(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}\right)$$

$$S(0) = S_0$$

Случай актива, который выплачивает дивиденды



доход от владения активом S :

$$Se^{qt}$$

Характерный пример: опцион на курс валют (FX option).

Как нужно модифицировать?

- Put-Call parity
- уравнение GBM для актива

Put-Call parity with $q \neq 0$



$$C - P = Se^{-q\tau} - Ke^{-r\tau}$$



$$C_0 = E^{\mathbb{Q}}[D_T C_T] = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} \max(0, S_T - K)\right]$$

$$S(t) = S(t - \Delta t) \exp\left((rt - qt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}})\right)$$

"The Greeks". Индикаторы риска



V : текущая цена опциона

Название	Определение
Delta	$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$
Gamma	$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
Theta	$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$
Vega	$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$
Rho	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$



Payoffs

- Бинарный (Digital, One Touch/No Touch)
- Европейский

Barriers

- Digital strike / EKI / EKO
- Continues : out-of-the money / in-the-money

Expiry and fixings

- Европейский
- Американский, Бермудский
- Азиатский опцион ...



- Расчет цены (Pricing)
 - **Mid price**
 - Bid-Ask spread
- Стратегия хеджирования. Управление риском.
- Применение в спекулятивных стратегиях

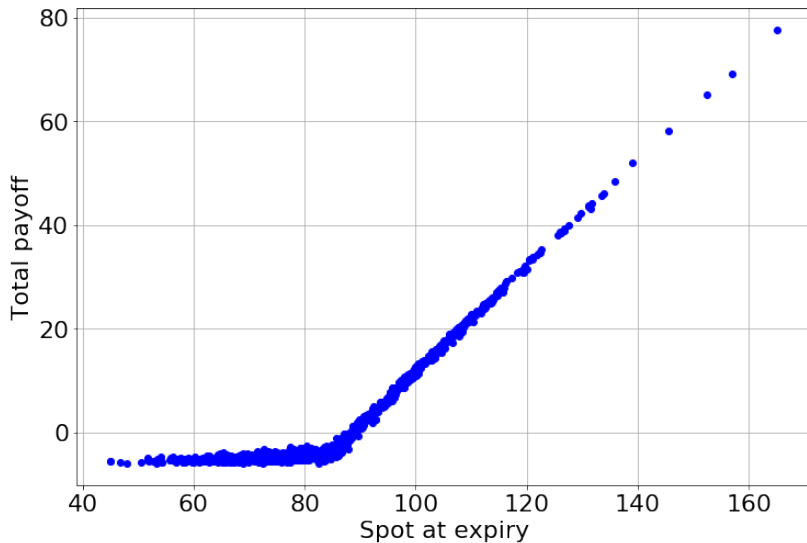
В теории нет разницы между теорией и практикой.
На практике бывает по-разному.



- Репликация - воспроизведение выплат по продукту через построение стратегии, использующей другие продукты
- Хеджирование - исключение влияния каких-то рисков путем добавления новых инструментов в портфель

Стратегии хеджирования и репликации могут быть статическими и динамическими.

Динамическая стратегия - delta hedging





Публикации - 1973. Нобелевская премия - 1997.

Предположения о рынке

- **No arbitrage** : не существует стратегии, которая бы давала прибыль без риска принести убытки.
- Можно занимать позицию с **любым номиналом** по все доступным активам. Включая отрицательные (long / short selling, borrow / lend) и дробные номиналы.
- **Frictionless market**. Пренебрегаем стоимостью транзакций и Bid/Ask spread.



В модели Блэка-Шульца предполагается, что на рынке есть безрисковый актив (Bond) и как минимум один актив с риском (Stock). (B, S)-рынок.

Активы (B, S)

- Risk-free rate: $r = \text{const}$.
- Движение рыночной цены S - **геометрическое броуновское движение** с постоянными параметрами drift и volatility.
- В классическом варианте по underlying активу нет начисления дивидендов. Но модель легко обобщается на случай актива с дивидендами. Это необходимо для, например, для FX options.



Обозначения

- t - текущее время
- T - maturity time
- S - цена базового актива
- K - strike price
- r - безрисковая процентная ставка (risk-free interest rate)
- q - процентная ставка выплат по базовому активу
- σ - volatility - параметр броуновского движения выплат по базовому активу

$N(z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ функция распределения для стандартного нормального (гаусовского) распределения.

Плотность распределения: $N'(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$



Рассматривается портфель

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S$$

Можно показать, что в предположении что S это GBM, $\Delta\Pi$ не зависит от случайной переменной, т.е. портфель - безрисковый актив.

Этот прием для хеджирования опциона называется delta-hedge.

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Black-Scholes-Merton model: PDE



(для случая $q = 0$)

Уравнение в частных производных для цены опциона

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$$

NB!: PDE, not SDE

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta + \Theta - rV = 0$$



для случая $q = 0$, для Европейского call-опциона

Формула для цены опциона

$$C(S, K, t, T, r, \sigma) = N(d_+)S - N(d_-)Ke^{-r\tau}$$

где:

$$\tau = T - t$$

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_- = d_+ - \sigma\sqrt{\tau}$$



Цена опциона как функция форвардной цены

$$C(F, K, t, T, r, \sigma) = D(N(d_+)F - N(d_-)K)$$

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{F}{K} \pm \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$



Формула для цены опциона

$$C(S, \tau) = SN(d_+) - Ke^{-r\tau}N(d_-)$$

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_- = d_+ - \sigma\sqrt{\tau}$$



Предположения

- **Frictionless market.** Пренебрегаем стоимостью транзакций и Bid/Ask spread.
- Движение рыночной цены S - **геометрическое броуновское движение**. $\sigma = \text{const}$.
- Risk-free rate: $r = \text{const}$.
- Можно занимать поцию с **любым номиналом** по все доступным активам. Включаю отрицательные (long / short selling, borrow / lend) и дробные номиналы.

Все это неправда



Как можно модифицировать

- доход от владения активом S : $q = \text{const} \neq 0$
- $r = r(t)$, $q = q(t)$
- $\sigma = \sigma(S_t, t)$

Black-Scholes-Merton model with $q \neq 0$



для call-опциона и для put-опциона:

$$C(S, K, \tau, r, q, \sigma) = N(d_+)Se^{-q\tau} - N(d_-)Ke^{-r\tau}$$

$$P(S, K, \tau, r, q, \sigma) = Ke^{-r\tau}N(-d_-) - Se^{-q\tau}N(-d_+)$$

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S}{K} + (r - q \pm \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Black-Scholes-Merton model: The Greeks



Если текущая цена опциона V .

Название	Определение	Для модели Блэка-Шульца (Европейский call опцион)
Delta	$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	$e^{-q\tau} N(d_+)$
Gamma	$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	$e^{-q\tau} \frac{N'(d_+)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$
Theta	$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	$= -\frac{\partial V}{\partial \tau} = -e^{-q\tau} \frac{SN'(d_+)\sigma}{2\sqrt{\tau}} + qSe^{-q\tau} N(d_+) - rKe^{-r\tau} N(d_-)$
Vega	$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$	$SN'(d_+)\sqrt{\tau}$
Rho	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$	$K\tau e^{-r\tau} N(d_-)$

Black-Scholes-Merton model



см. BlackScholes.ipynb

Вычисление цены численным решением уравнения в частных производных



- Уравнение в частных производных (PDE). Задает вид $f = f(t, S)$.
 - Граничные условия
-
- Дискретизация по t и S . "Решетка"
 - Разностная схема



$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} = rC$$

Разностные схемы для производных

Forward difference: $\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta S}$

Backward difference: $\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta S}$

Central or symmetric difference: $\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta S^2}$$

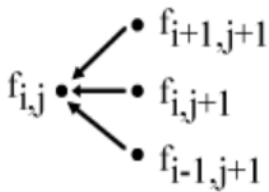
The explicit method



$$rf_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta t} + rS \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta S^2}$$

$$f_{i,j} = a_i f_{i-1,j+1} + b_i f_{i,j+1} + c_i + f_{i+1,j+1}$$

The explicit method



The implicit method



$$rf_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} + rS \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta S^2}$$

$$f_{i,j+1} = a_i f_{i-1,j} + b_i f_{i,j} + c_i + f_{i+1,j}$$

$$Mf_j = f_{j+1} - k$$

The implicit method



The Crank-Nicolson method



$$\begin{aligned} \frac{1}{2}rf_{i,j-1} + \frac{1}{2}rf_{i,j} &= \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta t} \\ &+ \frac{1}{2}rS_i \left[\frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S} \right] \\ &+ \frac{1}{4}\sigma^2 S_i^2 \left[\frac{f_{i+1,j-1} - 2f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}}{\Delta S^2} \right. \\ &\left. + \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta S^2} \right] \end{aligned}$$

$$A_1 f_{j-1} = A_2 f_j$$

The Crank-Nicolson method



$A1 =$

$$\begin{bmatrix} 1 - \beta_1 & -\gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 - \beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 - \beta_3 & -\gamma_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{M-2} & 1 - \beta_{M-2} & -\gamma_{M-2} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{M-1} & 1 - \beta_{M-1} & \end{bmatrix}$$

$$f_j = \begin{bmatrix} f_{1,j} \\ f_{2,j} \\ \dots \\ f_{M-1,j} \end{bmatrix}$$

The Crank-Nicolson method



$A2 =$

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 + \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 + \beta_3 & \gamma_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{M-2} & 1 + \beta_{M-2} & \gamma_{M-2} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{M-1} & 1 + \beta_{M-1} & \end{bmatrix}$$

$$\alpha_i = \frac{\Delta t}{4} (\sigma^2 k^2 - rk); \quad \beta_i = \frac{\Delta t}{2} (\sigma^2 k^2 + rk)$$

$$\gamma_i = \frac{\Delta t}{4} (\sigma^2 k^2 + rk); \quad k = \frac{S_i}{\Delta S}$$

The Crank-Nicolson method





см. PDE.ipynb



(B, S) -рынок называется полным (N -полным) если всякое $\mathcal{F}_N$ -измеримое ограниченное платежное поручение $f_N = f_N(\omega)$ достижимо. Т.е. найдется самофинансируемый портфель π и начальный капитал x т.ч. $X_0^\pi = x$ и $X_N^\pi = f_N$ ($\mathbb{P}$ -п.н.) [Ширяев]

A market in which every possible **contingent claim** can be replicated is said to be complete. [Joshi]

При построении репликации мы пренебрегаем накладными издержками (transaction costs, bid-ask spread)



Бинарный опцион

Как можно захеджировать бинарный опцион при помощи call опционов?

Данный материал не является предложением или предоставлением какой-либо услуги. Данный материал предназначен исключительно для информационных и иллюстративных целей и не предназначен для распространения в рекламных целях. Любой анализ третьих сторон не предполагает какого-либо одобрения или рекомендации. Мнения, выраженные в данном материале, являются актуальными на текущий момент, появляются только в этом материале и могут быть изменены без предварительного уведомления. Эта информация предоставляется с пониманием того, что в отношении материала, предоставленного здесь, вы будете принимать самостоятельное решение в отношении любых действий в связи с настоящим материалом, и это решение является основанным на вашем собственном суждении, и что вы способны понять и оценить последствия этих действий. ООО "Дойче Банк ТехЦентр" не несет никакой ответственности за любые убытки любого рода, относящихся к этому материалу.