



Стохастические модели эволюции процентных ставок (Дополнительный материал)

Михаил Андреев

10 апреля 2020





- $r = \text{const}$
- $r = r(t)$
- Stochastic rates models



Bank account / Money-market account

$$dB(t) = r_t B(t) dt, B(0) = 1$$

$$\Rightarrow B(t) = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right)$$

r_t – instantaneous spot rate / short rate



Discount factor

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right)$$

Zero-coupon bond

$P(t, T)$ - цена контракта, который выплачивает единичный номинал в момент $t = T$.

Если r_t детерминированная функция, то $D(t, T) = P(t, T)$

Если r_t случайный процесс, то $P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(t, T)]$



Ставка с непрерывным дисконтированием

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}$$
$$\Rightarrow P(t, T) = \exp(-R(t, T)\tau(t, T))$$

Ставка с простым дисконтированием

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}$$

$\tau(t, T)$ - year fraction



Numeraire N , numeraire U ,

$$\mathbb{E}^N \left[\frac{Z_T}{N_T} \right] = \mathbb{E}^U \left[\frac{U_0}{N_0} \cdot \frac{Z_T}{U_T} \right]$$

$$\frac{dQ^U}{dQ^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}$$



$$N_t = P(t, T)$$

$$N_T = P(T, T) = 1$$



FRA

$$N \cdot \tau(T, S) \cdot (K - L(T, S))$$

$L(T, S)$ – плавающая ставка, которая фиксируется в момент времени T (expiry) на период T, S . S – maturity

$$\text{FRA} = N [P(t, S) \cdot \tau(T, S) \cdot K - P(t, T) + P(t, S)]$$



$$F(t; T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right)$$

$$\text{FRA} = N \cdot P(t, S) \cdot \tau(T, S) (K - F(t; T, S))$$



$$\begin{aligned}\lim_{S \rightarrow T^+} F(t; T, S) &= - \lim_{S \rightarrow T^+} \frac{1}{P(t, S)} \frac{P(t, S) - P(t, T)}{S - T} \\ &= - \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} \\ &= - \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right)$$



Payer IRS / Receiver IRS

$$\text{PayerIRS} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)$$

$$\text{ReceiverIRS} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i))$$

$$\text{ReceiverIRS} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \text{FRA}(t, T_{i-1}, T_i, \tau_i, N, K)$$



$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta})}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

$$\text{IRS}(K = S_{\alpha,\beta}) = 0$$



$$\text{Cap} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N_{\tau_i} (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+$$

$$\text{Floor} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N_{\tau_i} (K - L(T_{i-1}, T_i))^+$$

- На что это похоже?
- Как это можно использовать?



$$\text{Cap}^{\text{Black}}(t=0) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i \cdot \text{Call}(K, F(0, T_{i-1}, T_i), \nu_i)$$

$$\text{Floor}^{\text{Black}}(t=0) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i \cdot \text{Put}(K, F(0, T_{i-1}, T_i), \nu_i)$$

$$\nu_i = \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}}$$



$$K_{ATM} = S_{\alpha,\beta}(0) = \frac{P(0, T_{\alpha}) - P(0, T_{\beta})}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i)}$$

$$\text{Cap}_{ATM} = \text{Floor}_{ATM}$$

If $K < K_{ATM}$, then Cap is ITM / Floor is OTM

If $K > K_{ATM}$, then Cap is OTM / Floor is ITM



$$\text{Cap} - \text{Floor} = \text{PayerIRS}$$

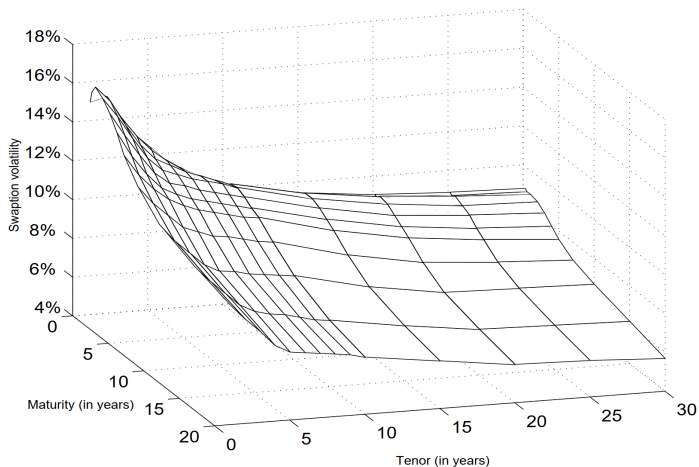


Option on PayerIRS

$$N \cdot D(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i \cdot (F(T_\alpha; T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+$$



$$\text{PS}^{Black}(t=0) = N \cdot \text{Call}(K, S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta} \sqrt{T_\alpha}) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i)$$
$$\text{RS}^{Black}(t=0) = N \cdot \text{Floor}(K, S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta} \sqrt{T_\alpha}) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i)$$



Brigo, Mercurio - Interest Rate Models - Theory and Practice



Модель	Уравнение
Vasicek	$dr_t = k(\theta - r_t) dt + \sigma dW_t$
Dothan	$dr_t = ar_t dt + \sigma r_t dW_t$
Hull-White	$dr_t = k_t(\theta_t - r_t) dt + \sigma(t) dW_t$
Cox-Ingersoll-Ross	$dr_t = k(\theta - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t$
CIR++	$r_t = x_t + \varphi_t; dx_t = k(\theta - x_t) dt + \sigma\sqrt{x_t} dW_t$



Модель	Уравнение
Black-Karasinski	$d \ln(r_t) = [\theta_t - \varphi_t \ln r_t] dt + \sigma_t r_t dW_t$
CEV (Constant Elasticity of Variance)	$dr_t = a(t) (b(t) - r_t) dt + \sigma(t) r_t^\alpha dW_t$



$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

$$f(0, T) = f^M(0, T)$$

$$W = (W_1, \dots, W_N)$$

$$\sigma(t, T) = (\sigma_1(t, T), \dots, \sigma_N(t, T))$$

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s)ds$$

Данный материал не является предложением или предоставлением какой-либо услуги. Данный материал предназначен исключительно для информационных и иллюстративных целей и не предназначен для распространения в рекламных целях. Любой анализ третьих сторон не предполагает какого-либо одобрения или рекомендации. Мнения, выраженные в данном материале, являются актуальными на текущий момент, появляются только в этом материале и могут быть изменены без предварительного уведомления. Эта информация предоставляется с пониманием того, что в отношении материала, предоставленного здесь, вы будете принимать самостоятельное решение в отношении любых действий в связи с настоящим материалом, и это решение является основанным на вашем собственном суждении, и что вы способны понять и оценить последствия этих действий. ООО "Дойче Банк ТехЦентр" не несет никакой ответственности за любые убытки любого рода, относящихся к этому материалу.