



Математические модели в инвестиционных банках Опционы. Лекция 3

Михаил Андреев

10 апреля 2020









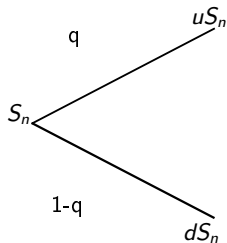
Бинарный опцион

Как можно реплицировать бинарный опцион при помощи call опционов?



Cox-Ross-Rubinstein model

Binomial options pricing model



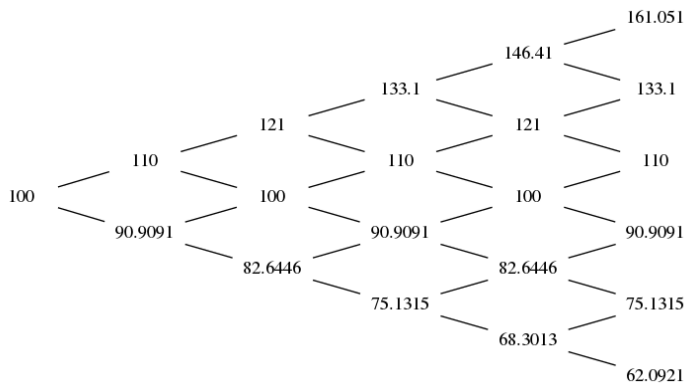
- Дискретное время (t_n , с шагом Δt)
- $S_{n+1} = \begin{cases} u \cdot S_n, & \text{с вероятностью } q \\ d \cdot S_n, & \text{с вероятностью } 1 - q \end{cases}$
- $d = \frac{1}{u}$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Статья: Cox, Ross, Rubinstein – Option Pricing A Simplified Approach

Cox-Ross-Rubinstein model





see CRR.ipynb



Базовый актив, не выплачивающий дивиденды, $r > 0$.

При каких условиях рационально исполнить американский колл опцион до экспираи?

Американский опцион



	$t = T$	
	$S_T \geq K$	$S_T < K$
long call		
long bond x K		
short spot		
?	?	?



см. Combinations.ipynb



- доход от владения активом S : $q = \text{const} \neq 0$
- Yield curve: $r = r(t)$, $q = q(t)$
- $\sigma = \sigma(\mathbf{S}_t, t)$

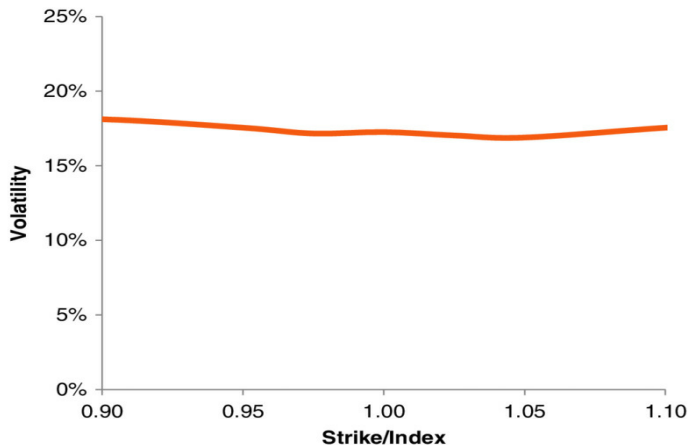


- В уравнение Блэка-Шульца для Европейского опциона при заданной волатильности определяет цену и наоборот
- Основной фактор неопределенности (риска) в цене опциона
- Цены на опционы котируются в терминах волатильности

$$\sigma = \sigma(K, t)$$

- Implied Volatility
- Realized volatility

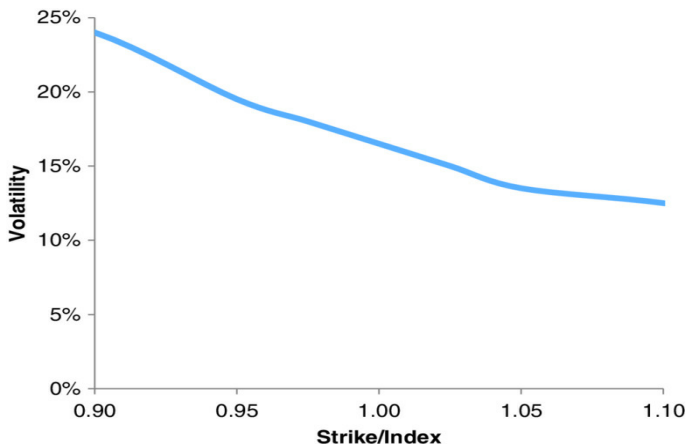
Equity volatility - before 1987



Representative S&P 500 Implied Volatilities prior to 1987

Emanuel Derman, M. B. Miller - 2016 - The Volatility Smile

Equity volatility - after 1987



Representative S&P 500 Implied Volatilities after 1987

Emanuel Derman, M. B. Miller - 2016 - The Volatility Smile



см. ImpliedVol.ipynb

Volatility smile / Volatility skew

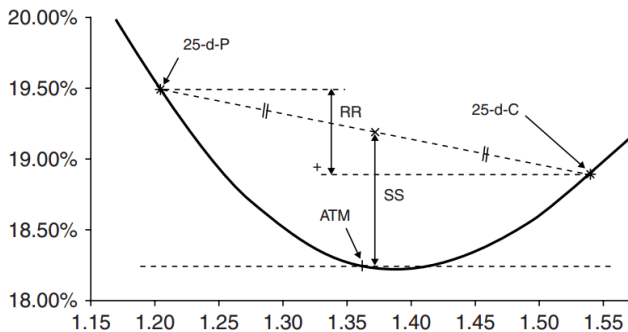


FX volatility surface



91) Actions ▾				92) Charts ▾				93) Settings ▾				94) Refresh				FX Volatility Surface			
EURUSD				02/19/10				Bloomberg BGN				Default				☒ RR/BF ☒ Bid/Ask			
																☐ Put/Call ☐ Mid/Spread			
Calendar Weekdays																			
		ATM		25D RR		25D BF		10D RR		10D BF									
Exp		Bid	Ask		Mid		Mid		Mid		Mid								
1D		7.556	8.778		-0.636		0.084		-1.251		0.299								
1W		11.550	12.350		-1.432		0.270		-2.540		0.840								
2W		11.650	12.300		-1.510		0.257		-2.750		0.808								
3W		11.490	12.030		-1.558		0.265		-2.857		0.823								
1M		11.540	12.040		-1.660		0.260		-3.042		0.795								
2M		11.605	12.005		-1.667		0.315		-3.075		0.990								
3M		11.795	12.195		-1.677		0.365		-3.103		1.165								
6M		12.340	12.690		-1.680		0.445		-3.132		1.460								
1Y		12.590	12.915		-1.683		0.520		-3.158		1.743								
18M		12.420	12.750		-1.577		0.525		-3.000		1.735								
2Y		12.315	12.665		-1.520		0.495		-2.872		1.665								
3Y		11.915	12.310		-1.407		0.457		-2.683		1.572								
5Y		11.075	11.520		-1.183		0.417		-2.217		1.363								
7Y		10.144	10.626		-1.205		0.353		-2.382		1.157								
96) Hide Quick Pricer				ATM DNS Spot & excl Prem RR=EUR Call-Put BF=(C+P)/2-ATM												Interpolated			
98) Launch OVML																			
						Bid		Ask				Mid		Deposit					
Maturity	1M	Delta		49.989%	Vol		11.540	12.040	Fwd		1.3498	EUR		0.286%					
Expiry	03/19/10	Strike		1.3506	USD Price		1.248%	1.303%	Spot		1.3499	USD		0.229%					

FX volatility smile



Iain J. Clark – Foreign Exchange Option Pricing: A Practitioner's Guide - Figure 3.4



- Local volatility
- Stochastic volatility
- Jump diffusion

- Параметризация поверхности волатильности, калибровка параметров
- Применение метода Монте Карло для случайного процесса определенного другими условиями



Если заданно распределение цен для ванильных опционов в зависимости от K и T , то функция $\sigma_{loc}(S_t, t)$ такая, процесс

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_{loc}(S_t, t) S_t dW_t$$

Соответствует заданным ценам для опциона $C(K, T)$.

Для случая $q = r = 0$.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

Bruno Dupire (1993, 1994); Emanuel Derman, Iraj Kani (1994);



$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_1$$

$$d\nu_t = \alpha_{\nu,t} dt + \beta_{\nu,t} dW_2$$

где $\alpha_{\nu,t}$ и $\beta_{\nu,t}$ некоторые функции ν и t
 W_1 и W_2 винеровские процессы, с корреляцией ρ .

$$\langle dW_1 dW_2 \rangle = \rho dt$$



$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_1$$

$$d\nu_t = \theta(\omega - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t} dW_2$$

где:

ω - среднее (long-term mean)

θ - скорость возврата к среднему

ξ - волатильность волатильности

Stochastic volatility : SABR (Stochastic Alpha, Beta, Rho)

$$dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_1,$$

$$d\sigma_t = \alpha \sigma_t dW_2,$$

$$\langle dW_1 dW_2 \rangle = \rho dt$$

β , α параметры модели, т.ч. $0 \leq \beta \leq 1$, $\alpha \geq 0$.



$$\begin{aligned}\sigma_B(K, f) &= \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2} \left\{ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 f/K + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 f/K + \dots \right\}} \cdot \left(\frac{z}{\kappa(z)} \right) \\ &\cdot \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho \beta v \alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right] t_{ex} + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Here

$$z = \frac{v}{\alpha} (fK)^{(1-\beta)/2} \log f/K,$$

and $\kappa(z)$ is defined by

$$\kappa(z) = \log \left\{ \frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right\}.$$

Hagan *et al.* (2002) Managing Smile Risk



$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + (J - 1)dN_t$$

J - случайный размер прыжка

N_t - процесс Пуассона



- Локальная волатильность (LV)
- Стохастическая волатильность (SV)
- Локальная волатильность + Стохастическая волатильность (LV/SV)
- Jumps
- Процентная ставка как стохастический процесс (Stochastic rates)



- $r = \text{const} \longrightarrow r = r(t)$
- $\sigma = \text{const} \longrightarrow \sigma = \sigma(K, T)$

- Rho : $\frac{\partial V}{\partial r} \longrightarrow ?$
- Vega : $\frac{\partial V}{\partial \sigma} \longrightarrow ?$

What is implied volatility?



"In essence, implied volatility is the wrong number we put into the wrong formula to get the correct option price."
Euan Sinclair – Volatility Trading







- James Ma Weiming – Mastering Python for Finance
<https://www.packtpub.com/big-data-and-business-intelligence/mastering-python-finance>
- Yves Hilpisch – Python for Finance –
<http://python-for-finance.com/>
- Yves Hilpisch – Derivatives Analytics with Python



- Bernt K. Øksendal – Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications // Б. Оксендаль – Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения
- Ubbo F. Wiersema – Brownian Motion Calculus
- Mark S. Joshi – The Concepts and Practice of Mathematical Finance
- Paul Wilmott on Quantitative Finance
- Ширяев А.Н. – Основы стохастической финансовой математики – Т.2



- Hull, John C. – Options, Futures and Other Derivatives / Джон К. Халл – Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты
- Giles Jewitt – FX Derivatives Trader School
- Euan Sinclair – Volatility Trading
- Iain J. Clark – Foreign Exchange Option Pricing: A Practitioner's Guide
- Jim Gatheral – The Volatility Surface: A Practitioner's Guide



► quantlib.org

The **QuantLib** project is aimed at providing a comprehensive software framework for quantitative finance. QuantLib is a free/open-source library for modeling, trading, and risk management in real-life.

QuantLib is written in C++ with a clean object model, and is then exported to different languages such as C#, Objective Caml, Java, Perl, Python, GNU R, Ruby, and Scheme.

<https://github.com/lballabio/QuantLib/tree/master/Examples>

<https://github.com/lballabio/QuantLib-SWIG/tree/master/Python/examples>

Данный материал не является предложением или предоставлением какой-либо услуги. Данный материал предназначен исключительно для информационных и иллюстративных целей и не предназначен для распространения в рекламных целях. Любой анализ третьих сторон не предполагает какого-либо одобрения или рекомендации. Мнения, выраженные в данном материале, являются актуальными на текущий момент, появляются только в этом материале и могут быть изменены без предварительного уведомления. Эта информация предоставляется с пониманием того, что в отношении материала, предоставленного здесь, вы будете принимать самостоятельное решение в отношении любых действий в связи с настоящим материалом, и это решение является основанным на вашем собственном суждении, и что вы способны понять и оценить последствия этих действий. ООО "Дойче Банк ТехЦентр" не несет никакой ответственности за любые убытки любого рода, относящихся к этому материалу.