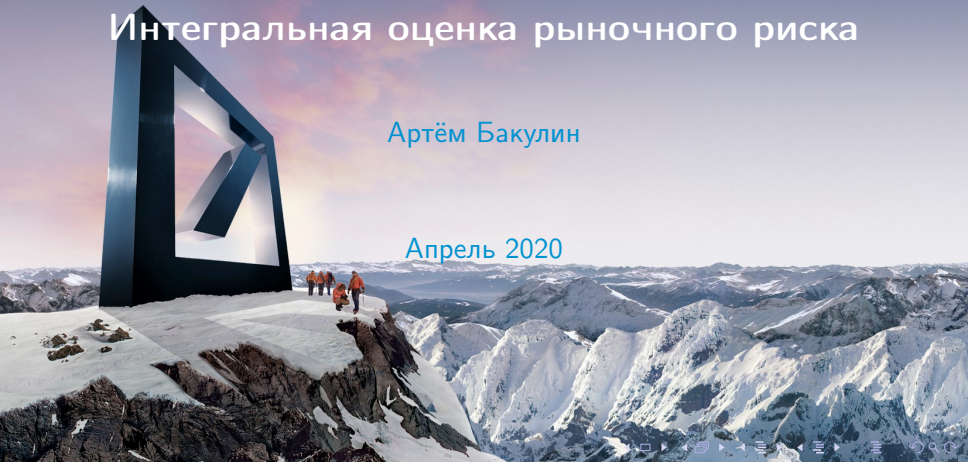




# Математические модели в инвестиционных банках Интегральная оценка рыночного риска

Артём Бакулин

Апрель 2020





**Рыночный риск** — возможность того, что текущая стоимость (present value, PV) нашего портфеля изменится, если изменятся цены рыночных инструментов. Например, возможность того, что купленная облигация подешевеет, а проданный опцион подорожает.

Трейдерам, его менеджерам, акционерам, регуляторам — всем нужна численная оценка рыночного риска, который мы взяли на себя. Стандартный ответ — оценить рыночный риск в терминах частных производных PV по рыночным переменным. Эти частные производные называются «греки» (Greeks) или чувствительности (sensitivities).



На ваш взгляд, насколько рискованна такая позиция?

- “Дельта”: +\$100 на каждые 0.0001 роста EUR/USD.
- “Вега”: +\$4 000 на каждый процентный пункт роста ATMФ 1Y волатильности EUR/USD.
- “CS01”: –\$50 на каждый базисный пункт роста iTraxx Europe Plus Index.

Если вы не трейдер, который целыми днями занимается одним узким сегментом рынка, то, скорее всего, цифры частных производных не скажут вам ничего. Реальность крупного инвестиционного банка — десятки тысяч частных производных первого, второго и третьего порядка.



**Value at Risk** — размер потерь, который с заданной вероятностью (обычно 1%) не будет превышен за заданное время (обычно 10 дней).

Например, если однодневный 5%-VaR равен \$1 000 000, то с вероятностью 95% наш убыток в течение одного дня не превысит один миллион долларов.

VaR — ответ на вопрос “Насколько плохо могут пойти дела?“, выраженный одним числом и в понятных единицах измерения (доллары, евро). Если будущая прибыль (или убыток) — случайная величина, то 5% VaR — значение функции распределения этой случайной величины  $F(0.05)$ .

Кстати, почему бы не считать 0% VaR?



**Expected Shortfall (ES)** — средний размер потерь при условии, что потери превзойдут соответствующий VaR.

Например, предположим, что наш однодневный 5% ES равен \$1 000 000. В случае, если реализуется один из 5% наихудших сценариев, мы потеряем в среднем \$1 000 000 (может быть больше, может быть меньше).

ES — ответ на вопрос “Если дела пойдут плохо, то сколько это будет нам стоить?”. В отличие от VaR, ES оценивает не один квантиль распределения, а весь “хвост”.

Согласно стандарту Fundamental Review of Trading Book (FRTB), банки будут обязаны считать 2.5% ES на несколько горизонтов: 10, 40, 60, 120 дней.



Вычисление VaR можно разбить на несколько этапов:

- Определить рыночные переменные (риск-факторы), которые влияют на PV нашего портфеля (FX, ставки, волатильности и т.п.)
- Определить совместное распределение будущих изменений риск-факторов.
- Определить распределение изменений PV портфеля.
- Вычислить VaR и/или ES исходя из функции распределения PV портфеля.

На каждом этапе мы будем делать те или иные предположения и допущения, и итоговая оценка VaR будет зависеть от использованной модели.



Пусть портфель состоит из двух облигаций 5Y и 10Y. Предположим, что изменения доходностей распределены нормально.

|                       | 5Y   | 10Y  |
|-----------------------|------|------|
| DV01, USD/bp          | 100  | -100 |
| Yield change mean, bp | 0.20 | 0.25 |
| Yield change std, bp  | 2.0  | 2.5  |
| Correlation           | 0.9  |      |

Изменение PV имеет нормальное распределение с параметрами:

$$\mu = (100 \quad -100) \begin{pmatrix} 0.20 \\ 0.25 \end{pmatrix} = -5$$

$$\sigma^2 = (100 \quad -100) \begin{pmatrix} 2.0 \cdot 2.0 & 0.9 \cdot 2.0 \cdot 2.5 \\ 0.9 \cdot 2.5 \cdot 2.0 & 2.5 \cdot 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \end{pmatrix} \approx 111.8^2$$

Первый перцентиль такого распределения:  $-\$265$ .



Достоинства:

- Очень легко считать.

Недостатки:

- Постулирует нормальность всех распределений. Распределения из реального мира имеют “толстые хвосты”.
- Оценка изменения  $PV$  по частным производным хорошо работает с “простыми” линейными деривативами (свопы, форварды), и не очень хорошо с опционами.

Не пытайтесь повторить это дома!

Кстати, как мы можем оценить распределение **будущих** изменений рыночных переменных?





Предположим, что в будущем рыночные переменные будут вести себя так же, как и в прошлом. Выберем некоторый период истории, например, последние 2 года, или стрессовый период 2008-2009. Построим выборку изменений рыночных переменных.

Например, год назад курс EURUSD изменился с 1.2229 до 1.2243 (на 0.11%), а волатильность с 6.97% до 7.19% (на 0.27 п.п.).

Текущий спот-курс EURUSD равен 1.1273, а волатильность 6.31%. Добавим в нашу выборку возможных будущих значений следующий сценарий:

$$S_{eurusd} = 1.1273 \cdot 1.0011 \approx 1.12854, \sigma_{eurusd} = 6.31\% + 0.27\% = 7.58\%$$

Переоценим портфель в этом сценарии, чтобы узнать потенциальную прибыль или убыток.



Если у нас есть 2 года исторических наблюдений (примерно 500 рабочих дней), то мы сможем составить выборку из 500 сценариев. Убыток в 5-м наихудшем будет нашей оценкой 1% VaR.

Достоинства:

- Не требует предположения о форме распределения.
- Точно учитывает нелинейность продуктов.

Недостатки:

- Вычислительно более сложен (требует переоценки каждой сделки в каждом сценарии).
- Требует предположения о стационарности распределений и корреляций.
- Если распределение имеет толстые хвосты, то выборки в 250-500 наблюдений может не хватить для надёжной оценки квантилей.



Демонстрация: портфель из опциона и базового актива.



Предположим, что рыночные переменные следуют некоторому аналитическому распределению с “хорошими” свойствами — толстыми хвостами, скошенностью, и т.п.

Примеры распределений: Стьюдента, Коши, логистическое...

Оценим параметры этого распределения по исторической выборке. После этого сгенерируем много (десятки тысяч) случайных реализаций этого распределения. Переоценим наш портфель в каждом из сценариев, чтобы вычислить VaR.



Предположим, что случайная величина  $X$  следует обобщённому распределению Стьюдента с  $\nu$  степенями свободы:

$$X \sim \mu + \sigma T_\nu$$

Моменты  $X$ :

$$Exp(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2 \frac{\nu}{\nu - 2}, Kurt(X) = \frac{6}{\nu - 4}$$

Выберем параметры  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $\nu$  так, чтобы выборочные моменты по исторической выборке совпадали с теоретическими.

Оценка максимального правдоподобия (maximum likelihood estimation, MLE) работает лучше, но выходит за рамки лекции.



Демонстрация: портфель из опциона и базового актива.



Достоинства:

- Позволяет получить больше реализаций редких событий.

Недостатки:

- Необходимо выбрать параметрическое семейство распределений.
- Требуется большого количества симуляций для приемлемой сходимости.

*"Prediction is very difficult, especially about the future."*  
(приписывается Нильсу Бору)



Данный материал не является предложением или предоставлением какой-либо услуги. Данный материал предназначен исключительно для информационных и иллюстративных целей и не предназначен для распространения в рекламных целях. Любой анализ третьих сторон не предполагает какого-либо одобрения или рекомендации. Мнения, выраженные в данном материале, являются актуальными на текущий момент, появляются только в этом материале и могут быть изменены без предварительного уведомления. Эта информация предоставляется с пониманием того, что в отношении материала, предоставленного здесь, вы будете принимать самостоятельное решение в отношении любых действий в связи с настоящим материалом, и это решение является основанным на вашем собственном суждении, и что вы способны понять и оценить последствия этих действий. ООО "Дойче Банк ТехЦентр" не несет никакой ответственности за любые убытки любого рода, относящихся к этому материалу.