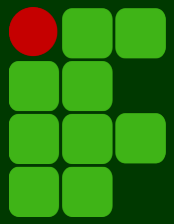


Derivadas

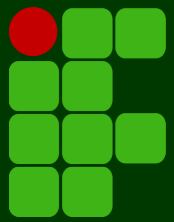
Revisão

Cálculo Diferencial e Integral III

Professor Me. Leomir Augusto Severo Grave

IFRS - Campus Ibirubá

Aula 1 - 11/08/2023

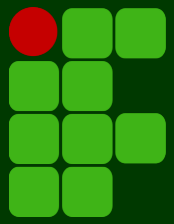


Notações para a Derivada

O processo de encontrar uma derivada é chamado derivação ou diferenciação. Podemos pensar na derivação como uma operação sobre funções, que associa a função f' a uma função f. Quando a variável independente for x, a operação de derivação também costuma ser denotada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

.

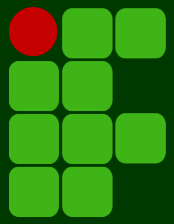


No caso em que também temos a variável dependente $y = f(x)$, a derivada costuma ser denotada por

$$f'(x) = y'(x)$$

ou

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$



Resumo das Regras de Derivação

As regras de derivação são:

1. Derivada de uma constante:

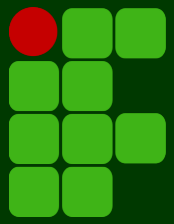
$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

2. Derivada da soma de duas funções:

$$\frac{d}{dx}(f + g) = f' + g'$$

3. Derivada do produto de duas funções:

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = f \cdot g' + g \cdot f'$$



4. Derivada de uma constante multiplicando uma função:

$$\frac{d}{dx}(cf) = c \cdot f'$$

5. Derivada da diferença de duas funções:

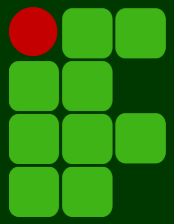
$$\frac{d}{dx}(f - g) = f' - g'$$

6. Derivada do quociente de duas funções:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

7. Derivada de uma função elevada a uma potência constante:

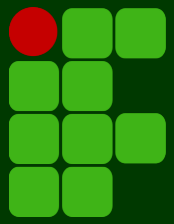
$$\frac{d}{dx}(x^r) = r \cdot x^{r-1}$$



Exemplos

Calcule a derivada da função $f(x)$: (a) multiplicando e então derivando e depois (b) usando a regra do produto. Verifique que (a) e (b) dão o mesmo resultado.

1) $f(x) = (x+1)(2x-1)$
2) $f(x) = (3x^2-1)(x^2+2)$
3) $f(x) = (x^2+1)(x^2-1)$
4) $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)$



Derivadas Trigonométricas

1. Derivada do seno:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

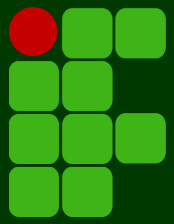
2. Derivada do cosseno:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

3. Derivada da tangente:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

Para mais fórmulas, veja o Manual de Fórmulas Disponível no Repositório Página 73. (QR Code)



Exemplo

Suponha que o Sol nascente passe diretamente sobre um prédio de 30 metros de altura e seja θ o ângulo de elevação do Sol (Figura). Encontre a taxa segundo a qual o comprimento x da sombra do prédio está variando em relação a θ, quando $\theta = 45°$. Expresse a resposta em metros/graus.

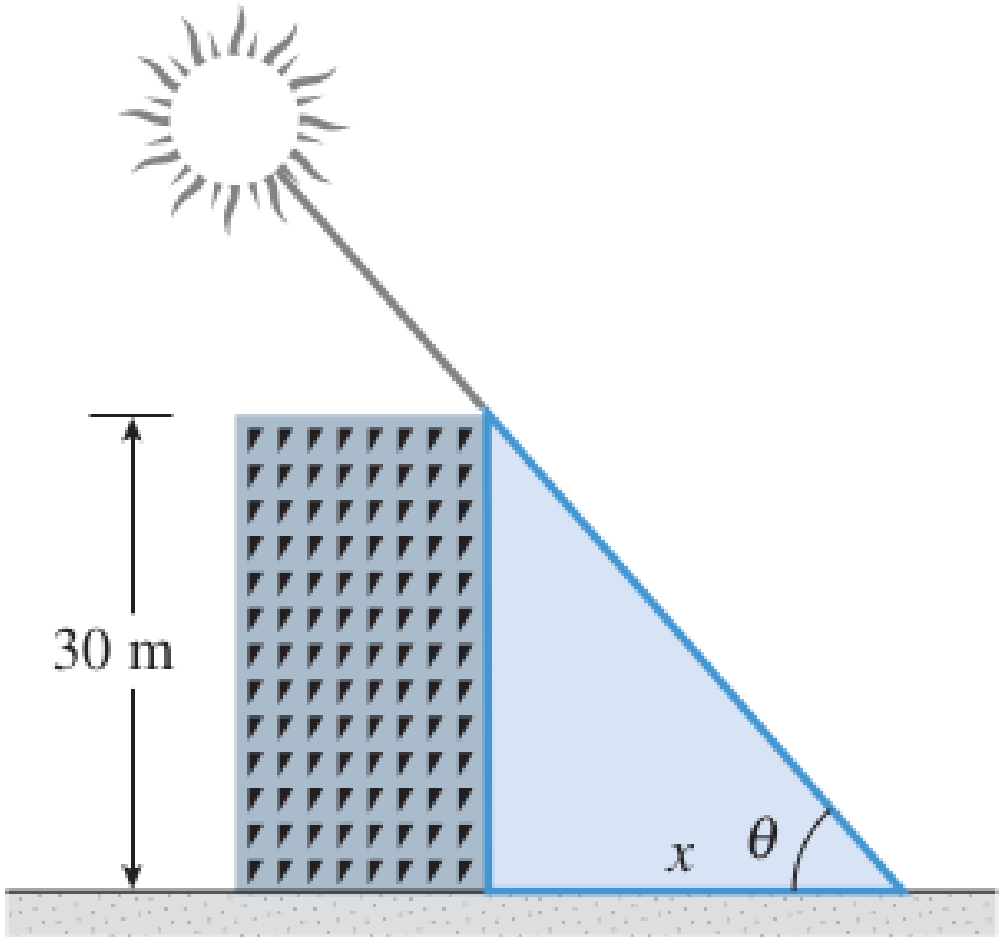
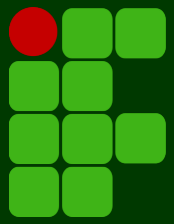


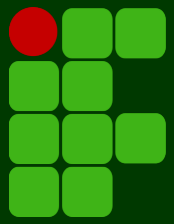
Figura: Ilustração do prédio e o ângulo de elevação do Sol.



Solução:

As variáveis x e θ estão relacionadas por $\tan\theta = \frac{30}{x}$, ou, de forma equivalente, $x = 30\cot\theta$. Se θ for medido em radianos, aplicando a fórmula, resultando em $\frac{dx}{d\theta} = -\frac{30}{\sin^2\theta}$, que é a taxa de variação do comprimento da sombra em relação ao ângulo de elevação em metros/radianos.

Quando $\theta = 45°$ (ou, de forma equivalente, $\theta = \frac{\pi}{4}$ radianos), $\frac{dx}{d\theta} = -\frac{30}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = -60m/rad$ convertendo para graus, obtemos $\frac{dx}{d\theta} \approx -1.05$ m/grau, o que significa que o comprimento da sombra está decrescendo (devido ao sinal negativo) a uma taxa aproximada de 1,05 metros por grau, com o aumento do ângulo de elevação.

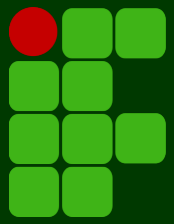


Regra da Cadeia

Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição $f \circ g$ será diferenciável no ponto x. Além disso, se $y = f(g(x))$ e $u = g(x)$, então $y = f(u)$ e

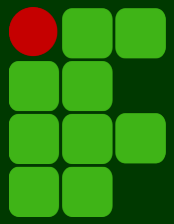
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

onde $\frac{dy}{du}$ representa a derivada de f em relação a u e $\frac{du}{dx}$ representa a derivada de g em relação a x. Isso é conhecido como a regra da cadeia para derivadas.



Exemplo

Encontre $\frac{dy}{dx}$ se $y = \cos(x^3)$.



Solução

Passo 1: Encontre $\frac{dy}{du}$

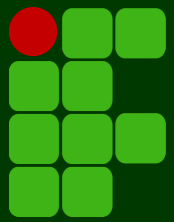
$$y = \cos(u)$$

$$\frac{dy}{du} = -\sin(u)$$

Passo 2: Encontre $\frac{du}{dx}$

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

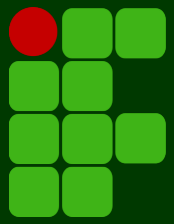


Solução

Agora, aplique a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\sin(u)) \cdot (3x^2) = -3x^2 \sin(x^3)$$

Portanto, a derivada $\frac{dy}{dx}$ da função $y = \cos(x^3)$ usando a regra da cadeia é $-3x^2 \sin(x^3)$.

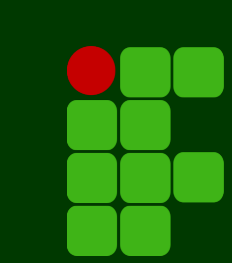


Uma Versão Alternativa da Regra da Cadeia

Uma maneira conveniente de lembrar essa fórmula consiste em chamar f a "função de fora" e g a "função de dentro" na composição $f(g(x))$ e, então, expressar a regra da cadeia como:

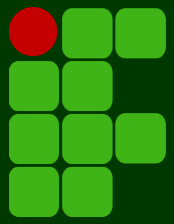
`A derivada de` $f(g(x))$ `é a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.`

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada da função de dentro}}$$



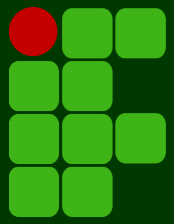
Exemplo

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg}^2 x] = \frac{d}{dx}[(\operatorname{tg} x)^2] = \underbrace{(2\operatorname{tg} x)}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{(\sec^2 x)}_{\text{Derivada da função de dentro}} = 2\operatorname{tg} x \sec^2 x$$



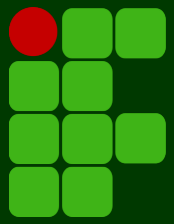
Crescimento, Decrescimento e Concavidade

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b).
(a) Se $f'(x) > 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é crescente em $[a, b]$.
(b) Se $f'(x) < 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é decrescente em $[a, b]$.
(c) Se $f'(x) = 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é constante em $[a, b]$.



Exemplo

Encontre os intervalos nos quais $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente.

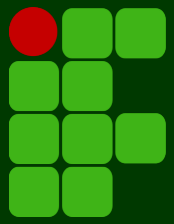


Solução:

Para encontrar os intervalos nos quais a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é crescente ou decrescente, precisamos analisar o sinal da derivada $f'(x)$. Primeiro, calculamos a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 3) = 2x - 4$$

Agora, precisamos encontrar os valores de x onde $f'(x)$ é positiva e negativa para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.



Para $f'(x) > 0$:

$$2x - 4 > 0$$

Simplificando e resolvendo a desigualdade para x:

$$2x > 4 \implies x > 2$$

Portanto, a função é crescente para $x > 2$.

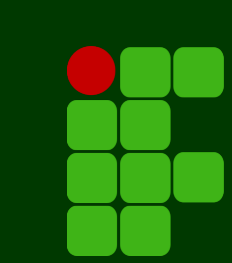
Para $f'(x) < 0$:

$$2x - 4 < 0$$

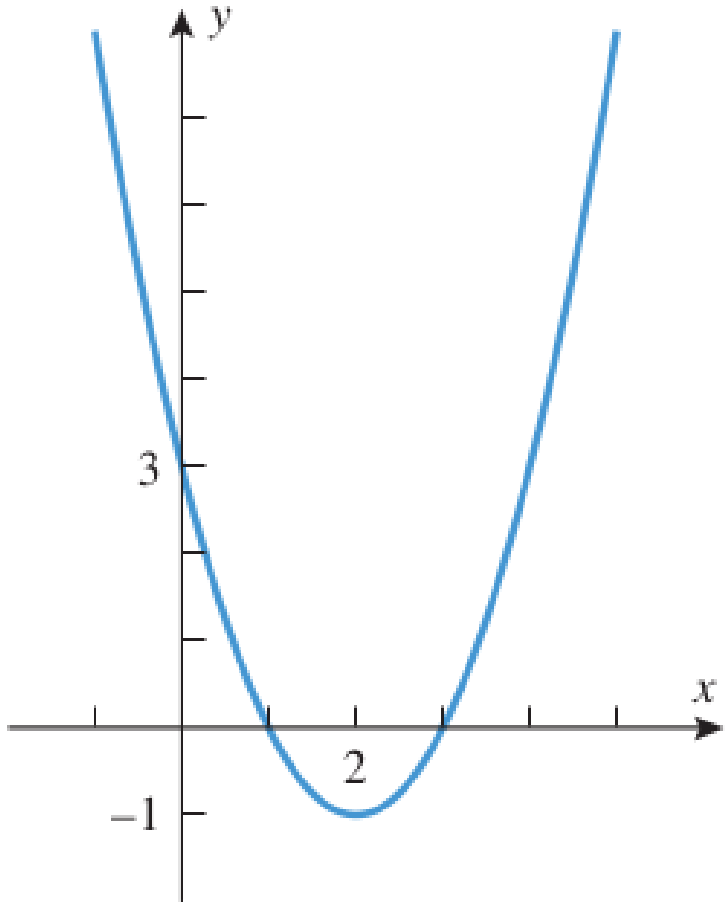
Simplificando e resolvendo a desigualdade para x:

$$2x < 4 \implies x < 2$$

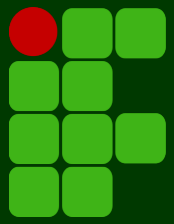
Portanto, a função é decrescente para $x < 2$.
Em resumo, a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é crescente no intervalo $[2, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 2]$.



Gráfico



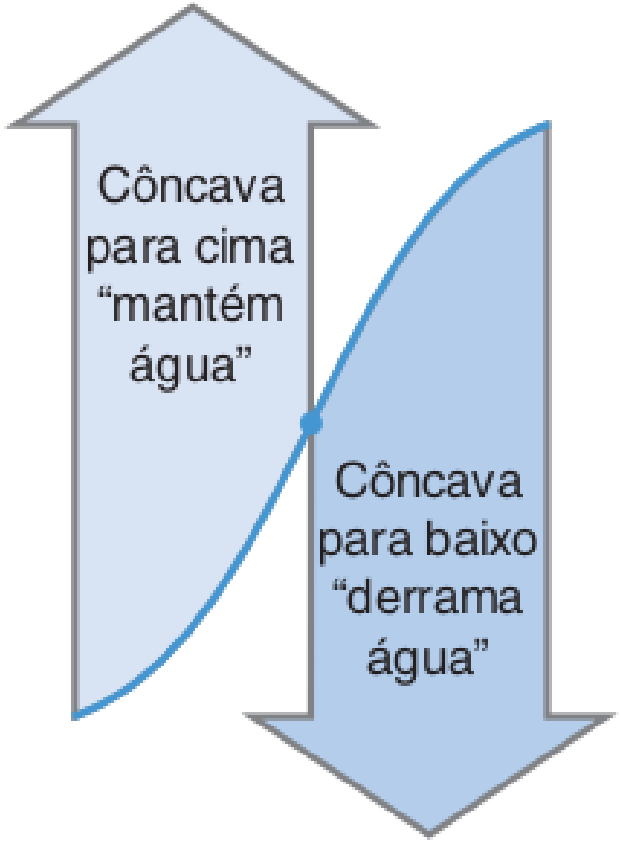
$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$



Concavidade

Se f for diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que f é côncava para cima no intervalo aberto se f' for crescente nesse intervalo, e dizemos que f é côncava para baixo no intervalo aberto se f' for decrescente nesse intervalo.

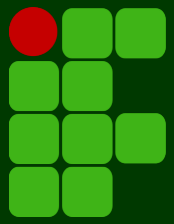
Esquema


Côncava para cima "mantém água"
Côncava para baixo "derrama água"

Representação das Retas Tangentes

Inclinação crescente

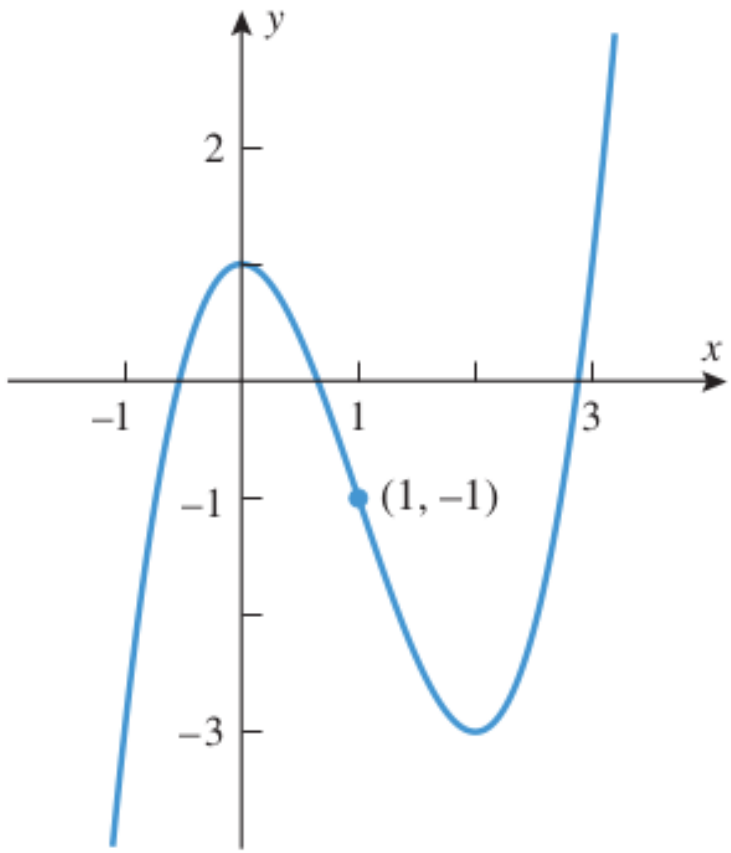
Inclinação decrescente



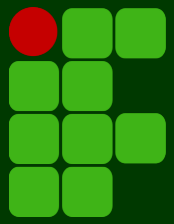
Exemplo

A Figura mostra o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Use as derivadas primeira e segunda de f para determinar os intervalos nos quais f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize todos os pontos de inflexão e confirme que suas conclusões são consistentes com o gráfico.

Figura



$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$



Solução:

Calculando as derivadas primeira e segunda de f, obtemos

$f'(x) = 3x(x-2)$

$f''(x) = 6(x-1)$

A análise de sinais dessas derivadas é mostrada nas tabelas seguintes:

Tabelas

INTERVALO	$(3x)(x-2)$	$f'(x)$	CONCLUSÃO
$x < 0$	$(-)(-)$	$+$	f é crescente em $(-\infty, 0]$
$0 < x < 2$	$(+)(-)$	$-$	f é decrescente em $[0, 2]$
$x > 2$	$(+)(+)$	$+$	f é crescente em $[2, +\infty)$

INTERVALO	$6(x-1)$	$f''(x)$	CONCLUSÃO
$x < 1$	$(-)$	$-$	f é côncava para baixo em $(-\infty, 1)$
$x > 1$	$(+)$	$+$	f é côncava para cima em $(1, +\infty)$

Acesse essa aula e outros materiais em: