

Notas del Curso “Ecuaciones diferenciales”

M. en C. Juliho Castillo

Facultad de Ingeniería, Universidad Panamericana

17 de agosto de 2016





¡Bienvenidos a Ecuaciones Diferenciales!

Mi nombre es Juliho Castillo...(sí, con “h” entre la “i” y la “o”).



¡Bienvenidos a Ecuaciones Diferenciales!

Mi nombre es Juliho Castillo...(sí, con “h” entre la “i” y la “o”).



Educación

- 1 *Candidato a Doctor:* Instituto de Matemáticas, UNAM, posgrado en Ciencias Matemáticas. Proyecto de Tesis: “Técnicas simplécticas aplicadas a las soluciones generalizadas de la ecuación de Hamilton- Jacobi”, bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.
- 2 *Maestro en Ciencias:* Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 5 de febrero de 2013. Tesis: “Clasificación de Capacidades Simplécticas en Superficies”, bajo la dirección del Dr. Rustam Sadykov.
- 3 *Licenciado en Ciencias:* Escuela de Ciencias, UABJO, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 14 de enero de 2011. Tesis: “Análisis Semiclásico de Operadores de Schrödinger”, bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.



Educación

- 1 *Candidato a Doctor:* Instituto de Matemáticas, UNAM, posgrado en Ciencias Matemáticas. Proyecto de Tesis: “Técnicas simplécticas aplicadas a las soluciones generalizadas de la ecuación de Hamilton- Jacobi”, bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.
- 2 *Maestro en Ciencias:* Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 5 de febrero de 2013. Tesis: “Clasificación de Capacidades Simplécticas en Superficies”, bajo la dirección del Dr. Rustam Sadykov.
- 3 *Licenciado en Ciencias:* Escuela de Ciencias, UABJO, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 14 de enero de 2011. Tesis: “Análisis Semiclásico de Operadores de Schrödinger”, bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.



Educación

- 1 *Candidato a Doctor:* Instituto de Matemáticas, UNAM, posgrado en Ciencias Matemáticas. Proyecto de Tesis: “Técnicas simplécticas aplicadas a las soluciones generalizadas de la ecuación de Hamilton- Jacobi”, bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.
- 2 *Maestro en Ciencias:* Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 5 de febrero de 2013. Tesis: “Clasificación de Capacidades Simplécticas en Superficies”, bajo la dirección del Dr. Rustam Sadykov.
- 3 *Licenciado en Ciencias:* Escuela de Ciencias, UABJO, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 14 de enero de 2011. Tesis: “Análisis Semiclásico de Operadores de Schrödinger”, bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.



Publicaciones

- 2014 *Symplectic capacities on surfaces*: Manuscripta Mathematica, Vol. 229, artículo 701, Artículo de Investigación. En colaboración con Dr. Rystam Sadykov
- 2012 *Aplicaciones del Control Estocástico al Análisis Semiclásico*: Aportaciones Matemáticas, Memorias 45, 69-96, Artículo de exposición.



Reconocimientos

- 2011 Premio Nacional “Mixbaal” a las Mejores Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Mención Honorífica
- 2011 Conferencista invitado, Sesión del Premio Mixbaal, ENOAN XXI
- 2001 Seleccionado Estatal, XV Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Delegación Oaxaca



Experiencia docente

- Actual** Profesor de Asignatura, Universidad Panamericana, ESDAI, Ciudad de México.
- 2014-2015** Coordinador Académico, Club de Matemáticas “Teorema”, Centro de Formación en Ciencias y Matemáticas, Oaxaca.
- 2014** Codelegado, Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Delegación Oaxaca.
- 2013** Profesor de Asignatura, Instituto Blaise Pascal, Académia de Matemáticas, Oaxaca de Juárez.
- 2013** Profesor de Asignatura, Universidad Anáhuac México Sur, Facultad de Ingeniería, Ciudad de México.
- 2012-2013** Profesor de Asignatura, Universidad Panamericana, Facultad de Ingeniería, Ciudad de México.
- 2010-2015** Entrenador, Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Delegación Oaxaca.



OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso el alumno, se pretende con este curso la exploración de las diferentes clases de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como también el desarrollo de la habilidad en la solución de problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería.

- 1 Reconocer los fundamentos de la clasificación de la ecuaciones diferenciales
- 2 Relacionar los conceptos de Solución, ecuación diferencial y los diferentes métodos de resolverla.
- 3 Resolver problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería a través del modelamiento de situaciones específicas.
- 4 Identificar las diferentes estructuras de una solución de una
- 5 Implementar un método de solución numérica a un caso de



OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso el alumno, se pretende con este curso la exploración de las diferentes clases de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como también el desarrollo de la habilidad en la solución de problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería.

- 1 Reconocer los fundamentos de la clasificación de la ecuaciones diferenciales
- 2 Relacionar los conceptos de Solución, ecuación diferencial y los diferentes métodos de resolverla.
- 3 Resolver problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería a través del modelamiento de situaciones específicas.
- 4 Identificar las diferentes estructuras de una solución de una
- 5 Implementar un método de solución numérica a un caso de



OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso el alumno, se pretende con este curso la exploración de las diferentes clases de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como también el desarrollo de la habilidad en la solución de problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería.

- 1 Reconocer los fundamentos de la clasificación de la ecuaciones diferenciales
- 2 Relacionar los conceptos de Solución, ecuación diferencial y los diferentes métodos de resolverla.
- 3 Resolver problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería a través del modelamiento de situaciones específicas.
- 4 Identificar las diferentes estructuras de una solución de una
- 5 Implementar un método de solución numérica a un caso de



OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso el alumno, se pretende con este curso la exploración de las diferentes clases de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como también el desarrollo de la habilidad en la solución de problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería.

- 1 Reconocer los fundamentos de la clasificación de la ecuaciones diferenciales
- 2 Relacionar los conceptos de Solución, ecuación diferencial y los diferentes métodos de resolverla.
- 3 Resolver problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería a través del modelamiento de situaciones específicas.
- 4 Identificar las diferentes estructuras de una solución de una
- 5 Implementar un método de solución numérica a un caso de



OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso el alumno, se pretende con este curso la exploración de las diferentes clases de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como también el desarrollo de la habilidad en la solución de problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería.

- 1 Reconocer los fundamentos de la clasificación de la ecuaciones diferenciales
- 2 Relacionar los conceptos de Solución, ecuación diferencial y los diferentes métodos de resolverla.
- 3 Resolver problemas relacionados con las ciencias básicas y la ingeniería a través del modelamiento de situaciones específicas.
- 4 Identificar las diferentes estructuras de una solución de una
- 5 Implementar un método de solución numérica a un caso de



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

Independientes: 48 horas



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

Independientes: 48 horas



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

2 Independientes: 48 horas



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

2 Independientes: 48 horas

Investigación de literatura de la materia, desarrollo de casos, elaboración de trabajos de investigación, elaboración de trabajos de investigación, elaboración de trabajos de investigación.



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

2 Independientes: 48 horas

- Investigación documental y de campo, presentando los resultados de las investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
- Baterías de ejercicios y problemas.
- Lectura de artículos científicos.
- Examen de casos especiales.



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

2 Independientes: 48 horas

- 1 Investigación documental y de campo, presentando los resultados de las investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
- 2 Baterías de ejercicios y problemas.
- 3 Lecturas de notas técnicas.
- 4 Estudio de temas específicos.



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

2 Independientes: 48 horas

- 1 Investigación documental y de campo, presentando los resultados de las investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
- 2 Baterías de ejercicios y problemas.
- 3 Lecturas de notas técnicas.
- 4 Estudio de temas específicos.



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

2 Independientes: 48 horas

- 1 Investigación documental y de campo, presentando los resultados de las investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
- 2 Baterías de ejercicios y problemas.
- 3 Lecturas de notas técnicas.
- 4 Estudio de temas específicos.



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

2 Independientes: 48 horas

- 1 Investigación documental y de campo, presentando los resultados de las investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
- 2 Baterías de ejercicios y problemas.
- 3 Lecturas de notas técnicas.
- 4 Estudio de temas específicos.



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1 Bajo conducción docente: 48 horas

- 1 Resolución de ejercicios y problemas.
- 2 Análisis de casos
- 3 Análisis de los temas expuestos por el docente.
- 4 Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.

2 Independientes: 48 horas

- 1 Investigación documental y de campo, presentando los resultados de las investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
- 2 Baterías de ejercicios y problemas.
- 3 Lecturas de notas técnicas.
- 4 Estudio de temas específicos.



Evaluación

- 2 evaluaciones parciales: 30 % cada una
- 1 examen final: 40 %

Cada evaluación parcial consistirá en:

- Tareas semanales 40 %
- Guía para examen 20 %
- Examen escrito 40 %



Evaluación

- 2 evaluaciones parciales: 30 % cada una
- 1 examen final: 40 %

Cada evaluación parcial consistirá en:

- Tareas semanales 40 %
- Guía para examen 20 %
- Examen escrito 40 %



Evaluación

- 2 evaluaciones parciales: 30 % cada una
- 1 examen final: 40 %

Cada evaluación parcial consistirá en:

- Tareas semanales 40 %
- Guía para examen 20 %
- Examen escrito 40 %



Evaluación

- 2 evaluaciones parciales: 30 % cada una
- 1 examen final: 40 %

Cada evaluación parcial consistirá en:

- Tareas semanales 40 %
- Guía para examen 20 %
- Examen escrito 40 %



Evaluación

- 2 evaluaciones parciales: 30 % cada una
- 1 examen final: 40 %

Cada evaluación parcial consistirá en:

- Tareas semanales 40 %
- Guía para examen 20 %
- Examen escrito 40 %



Nuestros libros de texto

- 1 BRONSON, R.; "Ecuaciones diferenciales"; McGrawHill, 3a edición.
- 2 ZILL, D., WRIGHT, W.; "Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera"; Cengage Learning, 8a edición, 2015.



Nuestros libros de texto

- 1 BRONSON, R.; "Ecuaciones diferenciales"; McGrawHill, 3a edición.
- 2 ZILL, D., WRIGHT, W.; "Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera"; Cengage Learning, 8a edición, 2015.



- 3 Conceptos básicos
 - Ecuaciones Diferenciales
 - Problemas de Valor Inicial y de Valores en la Frontera

- 4 Campos de pendientes



Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas. En general, una ecuación diferencial se puede escribir como

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (\text{ED})$$

donde F es una función de varias variables y $\frac{d^n y}{dx^n}$ es la n -ésima derivada de y respecto de x .



Ejemplo 4.1.

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \quad (1.1)$$

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 \quad (1.2)$$

$$4 \frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x) \frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^3 + 3y \left(\frac{dy}{dx} \right)^7 + y^3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 5x \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1.5)$$

Figura 4.1: Tipos de ecuaciones diferenciales



Definición 4.1.

- 1 Una ecuación diferencial es ordinaria si la función desconocida sólo depende de una variable; en otro caso, se llama parcial.
- El orden de una ecuación es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.



Definición 4.1.

- 1 Una ecuación diferencial es ordinaria si la función desconocida sólo depende de una variable; en otro caso, se llama parcial.

■ El orden de una ecuación es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.



Definición 4.1.

- 1 Una ecuación diferencial es ordinaria si la función desconocida sólo depende de una variable; en otro caso, se llama parcial.
- El orden de una ecuación es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.



Definición 4.1.

- 1 Una ecuación diferencial es ordinaria si la función desconocida sólo depende de una variable; en otro caso, se llama parcial.
- 2 El orden de una ecuación es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.



En el curso, utilizaremos las siguientes notaciones equivalentes.

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Si la variable independiente es el tiempo t y la función dependiente es la posición x , utilizaremos la siguiente notación:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$



En el curso, utilizaremos las siguientes notaciones equivalentes.

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Si la variable independiente es el tiempo t y la función dependiente es la posición x , utilizaremos la siguiente notación:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$



Una solución de la ec. diferencial (ED) en un intervalo $\mathcal{I}$ es una función $y(x)$ que satisface la ecuación en todos los puntos $x \in \mathcal{I}$.



Ejemplo 4.2.

Sea $y(x) = K_1 \sin(2x) + K_2 \cos(2x)$, donde K_1, K_2 son constantes arbitrarias; ¿es $y(x)$ una solución de la ecuación $y'' + 4y = 0$?



Ejemplo 4.3.

Determine si $y = x^2 - 1$ es una solución de

$$(y')^4 + y^2 = -1.$$



Ejemplo 4.4.

La solución encontrada para el ejemplo 4.2 es una solución general, es decir, *todas las soluciones son de esta forma*. Por ejemplo,

$$y(x) = 5 \sin(2x) - 3 \cos(2x).$$

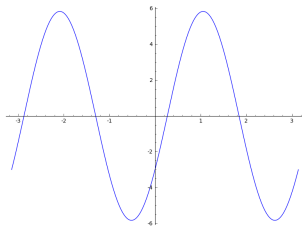


Figura 4.2: Solución particular de 4.2



Ejemplo 4.5.

La ecuación diferencial

$$y' + y^2 = 0$$

tiene dos soluciones particulares:

$$y = 1/x, \quad y = 0.$$



Si al resolver la ecuación diferencial (ED) tenemos, además, condiciones adicionales como

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_n$$

diremos que este es un *problema de valor inicial*; si las condiciones son

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \dots, y(x_n) = y_n$$

decimos que este es un *problema de valores en la frontera*.



Ejemplo 4.6 (Problema con valores iniciales).

$$\begin{cases} y'' + 2y' = e^{-x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$



Ejemplo 4.7 (Problema con condiciones en la frontera).

$$\begin{cases} y'' + 2y' = e^{-x} \\ y(0) = 1, y(1) = 1. \end{cases}$$



Un breve recordatorio de cálculo.

$$1 \quad \frac{d}{dx} (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 \frac{df_1(x)}{dx} + c_2 \frac{df_2(x)}{dx}$$

$$2 \quad \frac{d}{dx} (e^{\omega x}) = \omega e^{\omega x}$$

$$3 \quad \frac{d}{dx} (\cos(\omega x)) = -\omega \sin(\omega x)$$

$$4 \quad \frac{d}{dx} (\sin(\omega x)) = \omega \cos(\omega x)$$



Otras funciones útiles

$$\begin{cases} \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \frac{d}{dx} (\cosh(x)) = \sinh(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \frac{d}{dx} (\sinh(x)) = \cosh(x) \end{cases}$$



Ejemplo 4.8.

1 Si $y(x) = e^{\omega x}$, $\cosh(\omega x)$, $\sinh(\omega x)$, entonces

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \omega^2 y(x)$$

2 Si $y(x) = \cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$, entonces

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\omega^2 y(x)$$



Ejemplo 4.9.

Verifique que la solución de

$$\begin{cases} y''(x) = 9y(x) \\ y(-3) = -2, y'(-3) = 1 \end{cases}$$

es

$$y(x) = -2 \cosh(3x + 9) + \frac{1}{3} \sinh(3x + 9).$$



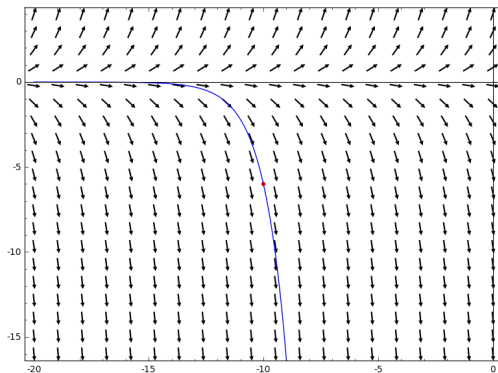
El *campo de pendientes* de la ecuación $y' = f(x, y)$ es la función que asigna a cada punto (x_0, y_0) la recta con pendiente $f(x_0, y_0)$ que pasa por dicho punto. Una *isoclina del campo vectorial* es una curva tal que en cada punto de la misma, la recta tangente es igual la recta dada por el campo de pendientes en dicho punto.



El *campo de pendientes* de la ecuación $y' = f(x, y)$ es la función que asigna a cada punto (x_0, y_0) la recta con pendiente $f(x_0, y_0)$ que pasa por dicho punto. Una *isoclina del campo vectorial* es una curva tal que en cada punto de la misma, la recta tangente es igual la recta dada por el campo de pendientes en dicho punto.



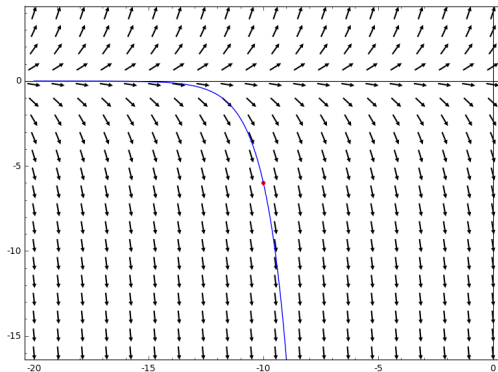
Ejemplo 5.1.



Campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = y$. En este caso $f(x, y) = y$. La curva es la isoclina que pasa por el punto $(-6, -10)$.



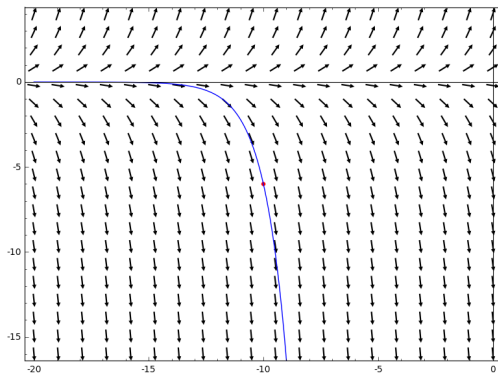
Ejemplo 5.1.



Campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = y$. En este caso $f(x, y) = y$. La curva es la isoclina que pasa por el punto $(-6, -10)$.



Ejemplo 5.1.



Campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = y$. En este caso $f(x, y) = y$. La curva es la isoclina que pasa por el punto $(-6, -10)$.



Teorema 5.1 (Teorema Fundamental de E.D.O.s).

Establecemos una región rectangular en el plano xy definida por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

tal que $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$.

Si $f(x, y)$ y $\partial_y(x, y)$ son continuas en $\mathcal{R}$, entonces existe algún intervalo

$$\mathcal{I} = \{x_0 - h < x < x_0 + h\} \subset\subset a \leq x \leq b$$

y una única función $y = f(x)$ definida en $\mathcal{I}$ tal que resuelve

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$



Concepto analítico	Interpretación geométrica
Ecuación diferencial	Campo de pendientes
Condición inicial	Punto en el plano
Solución	Isoclina que pasa por el punto dado



Observación 5.1.

El teorema fundamental de las EDOs dice que si el campo de pendientes es “suave”, a través de un punto dado y en una región suficientemente cerca a este punto, existe una isoclina *y sólo una*.



SageMath Cloud

Puede encontrar todas las soluciones de esta sección en [nuestra aula virtual de SageMath](#).



Forma Estándar y Forma Diferencial

La forma estándar o normal para una ecuación diferencial de primer orden es

$$y' = f(x, y) \quad (6.1)$$

Si

$$f(x, y) = \frac{M(x, y)}{-N(x, y)},$$

, entonces podemos escribir la ecuación (6.1) en su *forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (6.2)$$



Forma Estándar y Forma Diferencial

La forma estándar o normal para una ecuación diferencial de primer orden es

$$y' = f(x, y) \quad (6.1)$$

Si

$$f(x, y) = \frac{M(x, y)}{-N(x, y)},$$

, entonces podemos escribir la ecuación (6.1) en su *forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (6.2)$$



Ecuaciones Lineales

Si $f(x, y) = -p(x) * y + q(x)$, entonces diremos que la ecuación diferencial es *lineal*, y se puede reescribir como

$$y' + p(x) * y = q(x). \quad (6.3)$$



Ecuaciones de Bernoulli

Una ecuación diferencial de *Bernoulli* es una ecuación de la forma

$$y' + p(x) * y = q(x) * y^n \quad (6.4)$$

con n entero.



Una ecuación diferencial en su forma estandar (6.1) es *homogénea* si

$$f(tx, ty) = f(x, y) \quad (6.5)$$

para cualquier número real t .



Ecuaciones Separables

Si una ecuación diferencial en su forma diferencial (6.2), tenemos que

$$\begin{cases} M(x, y) = A(x) \\ N(x, y) = B(y), \end{cases}$$

diremos que es *separable*.



Ecuaciones Exactas

Una ecuación diferencial en forma diferencial (6.2) es *exacta* si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (6.6)$$



Ejemplo 6.1.

Escriba la ecuación diferencial $xy' - y^2 = 0$ en su forma estándar.



Ejemplo 6.2.

Escriba la ecuación diferencial $e^x y' + e^{2x} y = \sin(x)$ en su forma estándar.



Ejemplo 6.3.

Escriba la ecuación diferencial $y(y * y' - 1) = x$ en forma diferencial.



Ejemplo 6.4.

Escriba la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

en forma diferencial.



Ejemplo 6.5.

Escriba la ecuación diferencial $(x * y + 3)dx + (2x - y^2 + 1)dy = 0$ en su forma estandar.



Ejemplo 6.6.

Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales.

1 $y' = (\sin(x) * y) + e^x$

2 $y' = x * \sin(y) + e^x$

3 $y' = 5$

4 $y' = y^2 + x$

5 $y' + x * y^5 = 0$

6 $x * y' + y = \sqrt{y}$

7 $y' + x * y = e^x * y$

8 $y' + \frac{x}{y} = 0$



Solución General

La solución de

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \quad (7.1)$$

es

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c, \quad (7.2)$$

donde c es una constante de integración.



Soluciones al Problema de Valor Inicial

La solución al problema de valor inicial

$$A(x)dx + B(y)dy = 0; y(x_0) = y_0 \quad (7.3)$$

está dada por

$$\int_{x_0}^x A(s)ds + \int_{y_0}^y B(t)dt = 0. \quad (7.4)$$



Reducción de Ecuaciones Homogéneas

Recordemos que una ecuación diferencial es homogénea si

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f(tx, ty) \quad (7.5)$$

para todo número real t .



Toda ec. dif. homogénea se puede transformar en separable con el cambio de variable

$$y = x * \nu, \quad (7.6)$$

es decir $\nu = \frac{y}{x}$ con derivada

$$\frac{dy}{dx} = \nu + x * \frac{d\nu}{dx}. \quad (7.7)$$



Ejemplo 7.1.

Resuelva $xdx - y^2dy = 0$.



Ejemplo 7.2.

Resuelva $y' = y^2 * x^3$.



Ejemplo 7.3.

Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2}{y}.$$



Ejemplo 7.4.

Resuelva $y' = 5y$.



Ejemplo 7.5.

Resuelva

$$y' = \frac{x+1}{y^4+1}.$$



Ejemplo 7.6.

Resuelva

$$dy = 2t(y^2 + 9)dt.$$



Ejemplo 7.7.

Resuelva

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2.$$



Ejemplo 7.8.

- Resuelva

$$e^x dx - y dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

- Ahora, resuelva el mismo problema con la fórmula (7.4).



Ejemplo 7.9.

Resuelva

$$x * \cos(x)dx + (1 - 6 * y^5)dy$$



Ejemplo 7.10.

$$y' = \frac{y + x}{x}$$



Ejemplo 7.11.

Resuelva

$$y' = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$



Una ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (8.1)$$

es exacta si existe una función $g(x, y)$ tal que

$$dg(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy. \quad (8.2)$$



Prueba de exactitud

Si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en algún rectángulo del plano xy , entonces (8.1) es exacta si y solo si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial dy} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (8.3)$$



Para resolver (8.1) (suponiendo que es exacta), primero resolvemos:

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad (8.5)$$



La solución de (8.1) está dada de manera implícita por

$$g(x, y) = c \quad (8.6)$$



Factores integrantes

En general (8.1) no es exacta, pero ocasionalmente, se puede transformar en una.

Una función $l(x, y)$ es un *factor integrante* para (8.1) si la ecuación

$$l(x, y) (M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0 \quad (8.7)$$

es exacta.



Si

$$\frac{1}{N} (\partial_y M - \partial_x N) = g(x),$$

es decir, el lado izquierdo no depende de y , entonces

$$l(x, y) = e^{\int g(x) dx} \quad (8.8)$$

es un factor integrante.



De manera similar, si

$$\frac{1}{M} (\partial_y M - \partial_x N) = h(y),$$

es decir, el lado izquierdo no depende de x , entonces

$$l(x, y) = e^{\int h(y) dy} \quad (8.9)$$

es un factor integrante.



Group of terms	Integrating factor $I(x, y)$	Exact differential $dg(x, y)$
$y \, dx - x \, dy$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{x \, dy - y \, dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
$y \, dx - x \, dy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{y \, dx - x \, dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
$y \, dx - x \, dy$	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{x \, dy - y \, dx}{xy} = d\left(\ln \frac{y}{x}\right)$
$y \, dx - x \, dy$	$-\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan \frac{y}{x}\right)$
$y \, dx + x \, dy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{y \, dx + x \, dy}{xy} = d(\ln xy)$
$y \, dx + x \, dy$	$\frac{1}{(xy)^n}, \quad n > 1$	$\frac{y \, dx + x \, dy}{(xy)^n} = d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$
$y \, dy + x \, dx$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{y \, dy + x \, dx}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right]$
$y \, dy + x \, dx$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}, \quad n > 1$	$\frac{y \, dy + x \, dx}{(x^2 + y^2)^n} = d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}\right]$
$ay \, dx + bx \, dy$ (a, b constants)	$x^{a-1} y^{b-1}$	$x^{a-1} y^{b-1} (ay \, dx + bx \, dy) = d(x^a y^b)$

Figura 8.1: Tabla de factores integrantes más comunes.



Si $M(x, y) = yf(xy)$, $N(x, y) = xg(x, y)$, entonces

$$l(x, y) = \frac{1}{xM - yN} \quad (8.10)$$

es un factor integrante.



Observación 8.1.

En general, no es posible encontrar de manera sencilla y explícita un factor integrante para un ecuación diferencial dada.



Ejemplo 8.1.

Determine si la ecuación diferencial

$$2xydx + (1 + x^2)dy = 0$$

es exacta.

