Notas del Curso “Matemáticas Financieras I”

M. en C. Julio Castillo

Escuela de Administración de Instituciones, Universidad Panamericana

4 de julio de 2016

¡Bienvenidas a Matemáticas Financieras I!

Mi nombre es Juliho Castillo...(con "h" entre la "i" y la "o".)

¡Bienvenidas a Matemáticas Financieras I!

Mi nombre es Juliho Castillo...(con “h” entre la “i” y la “o”.)

Educación

1. *Candidato a Doctor:* Instituto de Matemáticas, UNAM, posgrado en Ciencias Matemáticas. Proyecto de Tesis: "Técnicas simplécticas aplicadas a las soluciones generalizadas de la ecuación de Hamilton- Jacobi", bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.
2. *Maestro en Ciencias:* Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 5 de febrero de 2013. Tesis: "Clasificación de Capacidades Simplécticas en Superficies", bajo la dirección del Dr. Rustam Sadykov.
3. *Licenciado en Ciencias:* Escuela de Ciencias, UABJO, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 14 de enero de 2011. Tesis: "Análisis Semiclásico de Operadores de Schrödinger", bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.

Educación

1. *Candidato a Doctor:* Instituto de Matemáticas, UNAM, posgrado en Ciencias Matemáticas. Proyecto de Tesis: "Técnicas simplécticas aplicadas a las soluciones generalizadas de la ecuación de Hamilton- Jacobi", bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.
2. *Maestro en Ciencias:* Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 5 de febrero de 2013. Tesis: "Clasificación de Capacidades Simplécticas en Superficies", bajo la dirección del Dr. Rustam Sadykov.
3. *Licenciado en Ciencias:* Escuela de Ciencias, UABJO, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 14 de enero de 2011. Tesis: "Análisis Semiclásico de Operadores de Schrödinger", bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.

Educación

1. *Candidato a Doctor:* Instituto de Matemáticas, UNAM, posgrado en Ciencias Matemáticas. Proyecto de Tesis: "Técnicas simplécticas aplicadas a las soluciones generalizadas de la ecuación de Hamilton- Jacobi", bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.
2. *Maestro en Ciencias:* Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 5 de febrero de 2013. Tesis: "Clasificación de Capacidades Simplécticas en Superficies", bajo la dirección del Dr. Rustam Sadykov.
3. *Licenciado en Ciencias:* Escuela de Ciencias, UABJO, especialidad en Matemáticas, fecha de titulación: 14 de enero de 2011. Tesis: "Análisis Semiclásico de Operadores de Schrödinger", bajo la dirección del Dr. Héctor Sanchez Morgado.

Publicaciones

2014 *Symplectic capacities on surfaces:* Manuscripta Mathematica, Vol. 229, artículo 701, Artículo de Investigación.En colaboración con Dr. Rystam Sadykov

2012 *Aplicaciones del Control Estocástico al Análisis Semiclásico:* Aportaciones Matemáticas, Memorias 45, 69-96, Artículo de exposición.

Reconocimientos

2011 Premio Nacional "Mixbaal" a las Mejores Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Mención Honorífica

2011 Conferencista invitado, Sesión del Premio Mixbaal, ENOAN XXI

2001 Seleccionado Estatal, XV Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Delegación Oaxaca

Experiencia docente

Actual Profesor de Asignatura, Universidad Panamericana, ESDAI, Ciudad de México.

4-2015 Coordinador Académico, Club de Matemáticas "Teorema", Centro de Formación en Ciencias y Matemáticas, Oaxaca.

2014 Codelegado, Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Delegación Oaxaca.

2013 Profesor de Asignatura, Instituto Blaise Pascal, Académia de Matemáticas, Oaxaca de Juárez.

2013 Profesor de Asignatura, Universidad Anáhuac México Sur, Facultad de Ingeniería, Ciudad de México.

2-2013 Profesor de Asignatura, Universidad Panamericana, Facultad de Ingeniería, Ciudad de México.

5-2010 Entrenador, Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Delegación Oaxaca.

¡Bienvenidas a Matemáticas financieras I!

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso el alumna:

- Conocerá la función de las finanzas
- Conocerá y manejará los procedimientos y análisis de los principales conceptos de las Matemáticas Financieras con el fin de evaluar el costo del dinero en sus modalidades de financiamiento e inversión, que permitan minimizar costos o elevar los beneficios.
- Conocerá y manejará los procedimientos y análisis de los principales conceptos de las Matemáticas Financieras con el fin de evaluar el costo del dinero en sus modalidades de financiamiento e inversión, que permitan minimizar costos o elevar los beneficios.
- Determinará estrategias con el fin de optimizar los resultados de

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso el alumna:

- Conocerá la función de las finanzas
- Conocerá y manejará los procedimientos y análisis de los principales conceptos de las Matemáticas Financieras con el fin de evaluar el costo del dinero en sus modalidades de financiamiento e inversión, que permitan minimizar costos o elevar los beneficios.
- Conocerá y manejará los procedimientos y análisis de los principales conceptos de las Matemáticas Financieras con el fin de evaluar el costo del dinero en sus modalidades de financiamiento e inversión, que permitan minimizar costos o elevar los beneficios.
- Determinará estrategias con el fin de optimizar los resultados de

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso el alumna:

- Conocerá la función de las finanzas
- Conocerá y manejará los procedimientos y análisis de los principales conceptos de las Matemáticas Financieras con el fin de evaluar el costo del dinero en sus modalidades de financiamiento e inversión, que permitan minimizar costos o elevar los beneficios.
- Conocerá y manejará los procedimientos y análisis de los principales conceptos de las Matemáticas Financieras con el fin de evaluar el costo del dinero en sus modalidades de financiamiento e inversión, que permitan minimizar costos o elevar los beneficios.
- Determinará estrategias con el fin de optimizar los resultados de

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso el alumna:

- Conocerá la función de las finanzas
- Conocerá y manejará los procedimientos y análisis de los principales conceptos de las Matemáticas Financieras con el fin de evaluar el costo del dinero en sus modalidades de financiamiento e inversión, que permitan minimizar costos o elevar los beneficios.
- Conocerá y manejará los procedimientos y análisis de los principales conceptos de las Matemáticas Financieras con el fin de evaluar el costo del dinero en sus modalidades de financiamiento e inversión, que permitan minimizar costos o elevar los beneficios.
- Determinará estrategias con el fin de optimizar los resultados de

1 1. INTRODUCCIÓN

1 Las Matemáticas Financieras.
2 El dinero y sus funciones.
3 El papel de los Bancos
4 La toma de decisiones

2 HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

1. 1. INTRODUCCIÓN
    1. Las Matemáticas Financieras.
    2. El dinero y sus funciones.
    3. El papel de los Bancos
    4. La toma de decisiones
2. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

1. 1. INTRODUCCIÓN
   1. Las Matemáticas Financieras.
   2. El dinero y sus funciones.
   3. El papel de los Bancos
   4. La toma de decisiones
2. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

1. 1. INTRODUCCIÓN
    1. Las Matemáticas Financieras.
    2. El dinero y sus funciones.
    3. El papel de los Bancos
    4. La toma de decisiones
2. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS
    - Series geométricas
    - Sumatoria

1. 1. INTRODUCCIÓN
   1. Las Matemáticas Financieras.
   2. El dinero y sus funciones.
   3. El papel de los Bancos
   4. La toma de decisiones
2. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS
   1. Series geométricas.
   2. Sumatoria.

1 1. INTRODUCCIÓN
1 Las Matemáticas Financieras.
2 El dinero y sus funciones.
3 El papel de los Bancos
4 La toma de decisiones
2 HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS
1 Series geométricas.
2 Sumatoria.

1. 1. INTRODUCCIÓN
   1. Las Matemáticas Financieras.
   2. El dinero y sus funciones.
   3. El papel de los Bancos
   4. La toma de decisiones
2. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS
   1. Series geométricas.
   2. Sumatoria.

1. 1. INTRODUCCIÓN
    1. Las Matemáticas Financieras.
    2. El dinero y sus funciones.
    3. El papel de los Bancos
    4. La toma de decisiones
2. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS
    1. Series geométricas.
    2. Sumatoria.

3 MEDICIÓN DEL INTERÉS

1. Conceptos básicos.
2. Tasa de interés.
3. Interés simple.
4. Interés compuesto.
5. Tasas equivalentes.
6. Ecuaciones equivalentes con interés simple y compuesto.

3 MEDICIÓN DEL INTERÉS

1. Conceptos básicos.
2. Tasa de interés.
3. Interés simple.
4. Interés compuesto.
5. Tasas equivalentes.
6. Ecuaciones equivalentes con interés simple y compuesto.

3 MEDICIÓN DEL INTERÉS

1. Conceptos básicos.
2. Tasa de interés.
3. Interés simple.
4. Interés compuesto.
5. Tasas equivalentes.
6. Ecuaciones equivalentes con interés simple y compuesto.

3 MEDICIÓN DEL INTERÉS

1. Conceptos básicos.
2. Tasa de interés.
3. Interés simple.
4. Interés compuesto.
5. Tasas equivalentes.
6. Ecuaciones equivalentes con interés simple y compuesto.

3. MEDICIÓN DEL INTERÉS
    1. Conceptos básicos.
    2. Tasa de interés.
    3. Interés simple.
    4. Interés compuesto.
    5. Tasas equivalentes.
    6. Ecuaciones equivalentes con interés simple y compuesto.

3 MEDICIÓN DEL INTERÉS

1. Conceptos básicos.
2. Tasa de interés.
3. Interés simple.
4. Interés compuesto.
5. Tasas equivalentes.
6. Ecuaciones equivalentes con interés simple y compuesto.

3 MEDICIÓN DEL INTERÉS

1. Conceptos básicos.
2. Tasa de interés.
3. Interés simple.
4. Interés compuesto.
5. Tasas equivalentes.
6. Ecuaciones equivalentes con interés simple y compuesto.

4 ANUALIDADES

1. Definición.
2. Anualidad vencida.
3. Anualidad anticipada.
4. Anualidad diferida.
5. Anualidad general.
6. Tablas de amortización.
7. Perpetuidad.

4 ANUALIDADES

1. Definición.
2. Anualidad vencida.
3. Anualidad anticipada.
4. Anualidad diferida.
5. Anualidad general.
6. Tablas de amortización.
7. Perpetuidad.

4 ANUALIDADES
1. Definición.
2. Anualidad vencida.
3. Anualidad anticipada.
4. Anualidad diferida.
5. Anualidad general.
6. Tablas de amortización.
7. Perpetuidad.

4. ANUALIDADES
    1. Definición.
    2. Anualidad vencida.
    3. Anualidad anticipada.
    4. Anualidad diferida.
    5. Anualidad general.
    6. Tablas de amortización.
    7. Perpetuidad.

4 ANUALIDADES

1. Definición.
2. Anualidad vencida.
3. Anualidad anticipada.
4. Anualidad diferida.
5. Anualidad general.
6. Tablas de amortización.
7. Perpetuidad.

4. ANUALIDADES
   1. Definición.
   2. Anualidad vencida.
   3. Anualidad anticipada.
   4. Anualidad diferida.
   5. Anualidad general.
   6. Tablas de amortización.
   7. Perpetuidad.

4 ANUALIDADES

1. Definición.
2. Anualidad vencida.
3. Anualidad anticipada.
4. Anualidad diferida.
5. Anualidad general.
6. Tablas de amortización.
7. Perpetuidad.

4. ANUALIDADES
    1. Definición.
    2. Anualidad vencida.
    3. Anualidad anticipada.
    4. Anualidad diferida.
    5. Anualidad general.
    6. Tablas de amortización.
    7. Perpetuidad.

5 PROYECTOS DE INVERSIÓN

1. Conceptos básicos: proyecto de inversión, documentos a presentar, estudios técnicos, de mercado y factibilidad.
2. Valor presente neto.
3. TIR.

5 PROYECTOS DE INVERSIÓN

1. Conceptos básicos: proyecto de inversión, documentos a presentar, estudios técnicos, de mercado y factibilidad.
2. Valor presente neto.
3. TIR.

5 PROYECTOS DE INVERSIÓN

1. Conceptos básicos: proyecto de inversión, documentos a presentar, estudios técnicos, de mercado y factibilidad.
2. Valor presente neto.
3. TIR.

5 PROYECTOS DE INVERSIÓN

1. Conceptos básicos: proyecto de inversión, documentos a presentar, estudios técnicos, de mercado y factibilidad.
2. Valor presente neto.
3. TIR.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
   1. Resolución de ejercicios y problemas.
   2. Análisis de casos
   3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
   4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
    1. Resolución de ejercicios y problemas.
    2. Análisis de casos
    3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
    4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
    1. Resolución de ejercicios y problemas.
    2. Análisis de casos
    3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
    4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
    1. Resolución de ejercicios y problemas.
    2. Análisis de casos
    3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
    4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
   1. Resolución de ejercicios y problemas.
   2. Análisis de casos
   3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
   4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas
   1. Investigación documental y de campo, presentando los resultados delas investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
   2. Baterías de ejercicios y problemas.
   3. Lecturas de notas técnicas
   4. Estudio de temas específicos.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
   1. Resolución de ejercicios y problemas.
   2. Análisis de casos
   3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
   4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas
   1. Investigación documental y de campo, presentando los resultados delas investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
   2. Baterías de ejercicios y problemas.
   3. Lecturas de notas técnicas.
   4. Estudio de temas específicos.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
   1. Resolución de ejercicios y problemas.
   2. Análisis de casos
   3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
   4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas
   1. Investigación documental y de campo, presentando los resultados delas investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
   2. Baterías de ejercicios y problemas.
   3. Lecturas de notas técnicas.
   4. Estudio de temas específicos.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
   1. Resolución de ejercicios y problemas.
   2. Análisis de casos
   3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
   4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas
   1. Investigación documental y de campo, presentando los resultados delas investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
   2. Baterías de ejercicios y problemas.
   3. Lecturas de notas técnicas.
   4. Estudio de temas específicos.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
    1. Resolución de ejercicios y problemas.
    2. Análisis de casos
    3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
    4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas
    1. Investigación documental y de campo, presentando los resultados delas investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
    2. Baterías de ejercicios y problemas.
    3. Lecturas de notas técnicas.
    4. Estudio de temas específicos.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Bajo conducción docente: 48 horas
    1. Resolución de ejercicios y problemas.
    2. Análisis de casos
    3. Análisis de los temas expuestos por el docente.
    4. Uso de software para aplicación de modelos matemáticos financieros en la toma de decisiones.
2. Independientes: 48 horas
    1. Investigación documental y de campo, presentando los resultados delas investigaciones en forma escrita y poniendo énfasis en las conclusiones.
    2. Baterías de ejercicios y problemas.
    3. Lecturas de notas técnicas.
    4. Estudio de temas específicos.

Evaluación

- Evaluación continua (Moodle): 30 %
- Evaluación continua (Quizzes): 30 %
- Evaluación final: 40 %

Evaluación

- Evaluación continua (Moodle): 30 %
- Evaluación continua (Quizzes): 30 %
- Evaluación final: 40 %

Evaluación

- Evaluación continua (Moodle): 30 %
- Evaluación continua (Quizzes): 30 %
- Evaluación final: 40 %

Competencias

1. Capacidad de análisis y síntesis
2. Resolución de problemas
3. Cuidado de los detalles

Competencias

1. Capacidad de análisis y síntesis
2. Resolución de problemas
3. Cuidado de los detalles

Competencias

1. Capacidad de análisis y síntesis
2. Resolución de problemas
3. Cuidado de los detalles

Nuestros libros de texto

1. Matemáticas aplicadas a negocios y economía;
   Díaz Mata, Alfredo (Autor);
   México : Pearson : Prentice-Hall, 2005.
2. Matemáticas financieras; Ayres, Frank Jr.; McGraw Hill, 1991.
3. Matemáticas discreta y combinatoria.
   Grimaldi, Ralph P. (Autor)
   México : Addison-Wesley Longman, [1998]
4. HOFFMANN, Laurence et. el. "Matemáticas Aplicadas a la Administración y los Negocios". 1a ed. México: McGraw-Hill, 2014.

Nuestros libros de texto

1. Matemáticas aplicadas a negocios y economía;
Díaz Mata, Alfredo (Autor);
México : Pearson : Prentice-Hall, 2005.
2. Matemáticas financieras; Ayres, Frank Jr.; McGraw Hill, 1991.
3. Matemáticas discreta y combinatoria.
Grimaldi, Ralph P. (Autor)
México : Addison-Wesley Longman, [1998]
4. HOFFMANN, Laurence et. el. "Matemáticas Aplicadas a la Administración y los Negocios". 1a ed. México: McGraw-Hill, 2014.

Nuestros libros de texto

1. Matemáticas aplicadas a negocios y economía;
   Díaz Mata, Alfredo (Autor);
   México : Pearson : Prentice-Hall, 2005.
2. Matemáticas financieras; Ayres, Frank Jr.; McGraw Hill, 1991.
3. Matemáticas discreta y combinatoria.
   Grimaldi, Ralph P. (Autor)
   México : Addison-Wesley Longman, [1998]
4. HOFFMANN, Laurence et. el. "Matemáticas Aplicadas a la Administración y los Negocios". 1a ed. México: McGraw-Hill, 2014.

Nuestros libros de texto

1. Matemáticas aplicadas a negocios y economía;
   Díaz Mata, Alfredo (Autor);
   México : Pearson : Prentice-Hall, 2005.
2. Matemáticas financieras; Ayres, Frank Jr.; McGraw Hill, 1991.
3. Matemáticas discreta y combinatoria.
   Grimaldi, Ralph P. (Autor)
   México : Addison-Wesley Longman, [1998]
4. HOFFMANN, Laurence et. el. "Matemáticas Aplicadas a la Administración y los Negocios". 1a ed. México: McGraw-Hill, 2014.

Matemática Financiera

- Básicamente, las Matemáticas Financieras estudian las tasas de interés. Implícitamente están incluidos los estudios de créditos, inversiones, capitalizaciones y, en general, el desarrollo de las operaciones financieras.
- La tasa de interés es la relación que existe entre la cantidad de dinero pagado o recibido y la cantidad de dinero utilizado, es decir, la relación existente entre la utilidad y la inversión, mostrada en términos de porcentaje.
- Las Matemáticas Financieras son un conjunto de métodos matemáticos que permiten determinar el valor del dinero en el tiempo.

Matemática financiera. (2016, 29 de abril). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 02:40, junio 8, 2016 desde https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Matem%C3%A1tica_financiera&oldid=90759988

Matemática Financiera

- Básicamente, las Matemáticas Financieras estudian las tasas de interés. Implícitamente están incluidos los estudios de créditos, inversiones, capitalizaciones y, en general, el desarrollo de las operaciones financieras.
- La tasa de interés es la relación que existe entre la cantidad de dinero pagado o recibido y la cantidad de dinero utilizado, es decir, la relación existente entre la utilidad y la inversión, mostrada en términos de porcentaje.
- Las Matemáticas Financieras son un conjunto de métodos matemáticos que permiten determinar el valor del dinero en el tiempo.

Matemática financiera. (2016, 29 de abril). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 02:40, junio 8, 2016 desde https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Matem%C3%A1tica_financiera&oldid=90759988

Matemática Financiera

- Básicamente, las Matemáticas Financieras estudian las tasas de interés. Implícitamente están incluidos los estudios de créditos, inversiones, capitalizaciones y, en general, el desarrollo de las operaciones financieras.
- La tasa de interés es la relación que existe entre la cantidad de dinero pagado o recibido y la cantidad de dinero utilizado, es decir, la relación existente entre la utilidad y la inversión, mostrada en términos de porcentaje.
- Las Matemáticas Financieras son un conjunto de métodos matemáticos que permiten determinar el valor del dinero en el tiempo.

Matemática financiera. (2016, 29 de abril). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 02:40, junio 8, 2016 desde https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Matem%C3%A1tica_financiera&oldid=90759988

Dinero

- Dinero es todo activo o bien generalmente aceptado como medio de pago por los agentes económicos para sus intercambios y que además cumple las funciones de ser unidad de cuenta y depósito de valor. Algunos ejemplos de dinero son: las monedas y los billetes, las tarjetas de débito, y las transferencias electrónicas, entre otros.
- El dinero, tal como lo conocemos hoy (billetes y monedas sin valor propio), debe estar avalado o certificado por la entidad emisora. Actualmente son los gobiernos, a través de las leyes, quienes determinan cual es el tipo de dinero de curso legal, pero son otras entidades, como los bancos centrales y las casas de la moneda (Ceca), los que se encargan, primero, de regular y controlar la política monetaria de una economía, y segundo, de crear las monedas y billetes según la demanda y la necesidad de tener dinero físico.

Dinero

- Dinero es todo activo o bien generalmente aceptado como medio de pago por los agentes económicos para sus intercambios y que además cumple las funciones de ser unidad de cuenta y depósito de valor. Algunos ejemplos de dinero son: las monedas y los billetes, las tarjetas de débito, y las transferencias electrónicas, entre otros.
- El dinero, tal como lo conocemos hoy (billetes y monedas sin valor propio), debe estar avalado o certificado por la entidad emisora. Actualmente son los gobiernos, a través de las leyes, quienes determinan cual es el tipo de dinero de curso legal, pero son otras entidades, como los bancos centrales y las casas de la moneda (Ceca), los que se encargan, primero, de regular y controlar la política monetaria de una economía, y segundo, de crear las monedas y billetes según la demanda y la necesidad de tener dinero físico.

Banco

- Un banco es una empresa financiera que se encarga de captar recursos en la forma de depósitos, y prestar dinero, así como la prestación de servicios financieros.
- La banca, o el sistema bancario, es el conjunto de entidades o instituciones que, dentro de una economía determinada, prestan el servicio de banco. La internalización y la globalización promueven la creación de una Banca universal.

Banco. (2016, 7 de junio). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 02:43, junio 8, 2016 desde https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Banco&oldid=91555666.

Banco

- Un banco es una empresa financiera que se encarga de captar recursos en la forma de depósitos, y prestar dinero, así como la prestación de servicios financieros.
- La banca, o el sistema bancario, es el conjunto de entidades o instituciones que, dentro de una economía determinada, prestan el servicio de banco. La internalización y la globalización promueven la creación de una Banca universal.

Banco. (2016, 7 de junio). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 02:43, junio 8, 2016 desde `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Banco&oldid=91555666`.

Finanzas corporativas

- La administración financiera o finanzas corporativas es un área de la administración que se centra en las decisiones monetarias que hacen las empresas y en las herramientas y análisis utilizados para tomar esas decisiones. El principal objetivo de las finanzas corporativas es maximizar el valor del accionista.
- La disciplina puede dividirse en decisiones y técnicas de largo plazo, y corto plazo. Las decisiones de inversión en capital son elecciones de largo plazo sobre qué proyectos deben recibir financiación, sobre si financiar una inversión con fondos propios o deuda, y sobre si pagar dividendos a los accionistas. Por otra parte, las decisiones de corto plazo se centran en el equilibrio a corto plazo de activos y pasivos. El objetivo aquí se acerca a la gestión del efectivo, existencias y la financiación de corto plazo.
- El término finanzas corporativas suele asociarse con frecuencia a banca de inversión. El rol típico de un banquero de inversión es

5 Logaritmos
- Leyes de los exponentes
- Funciones exponenciales
- Logaritmos
- Logaritmo natural

6 Sucesiones
- Sucesiones aritméticas
- Sucesiones geométricas
- Series
- Aplicaciones

En esta sección supondremos que las bases son números positivos, mientras que los coeficientes son números reales.

$$b^m \times b^n = b^{m+n}. \tag{5.1}$$

Ejemplo 5.1.

$$b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{5}} = b^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = b^{\frac{22}{15}}.$$

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}. \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.2.

$$\frac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{5}}} = b^{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}} = b^{-\frac{2}{15}}.$$

$$(b^m)^n = a^{mn}. \tag{5.3}$$

Ejemplo 5.3.

$$\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = b^{\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\right)} = b^{\frac{8}{15}}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \tag{5.4}$$

Ejemplo 5.4.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}.$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}. \tag{5.5}$$

Ejemplo 5.5.

$$b^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}$$

$$b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n}. \tag{5.6}$$

Ejemplo 5.6.

$$b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{b^2}$$

Ejemplo 5.7.

Simplifique

1. $ax^4 \times a^3x^5.$
2. $a^3x^4 \times a^2y^3 \times x^2y^6$
3. $\dfrac{y^2}{y}$
4. $\dfrac{(x^2y^3) \times (xy^5)}{y^4 \times y^3}$
5. $(i^3)^3 \times (i^2)^3$
6. $\left(\dfrac{5x}{x^2}\right)^3$
7. $\left(\dfrac{x^3}{y^5}\right)^2$
8. $\left(\dfrac{2Z^5}{x^3y^5}\right)^3$
9. $\dfrac{(1.80)^5 \times (1.80)^3 \times (1.80)^2}{(1.80)}$

Puede consultar las respuesta en SageMathCloud.

Ejemplo 5.8.

1. 1^0
2. $b^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{4}}$
3. $\left(\dfrac{b^{3/4}b^{6/8}}{b^{1/4}}\right)^{1/4}$
4. $(y^{-2})^3$
5. $\left(a^{-1/4}\right)^{-2}$
6. $\dfrac{(y^{-4/7})(y^{-4/7})^7}{y^{-1/5}}$
7. $(1+0.075)^{-5}\times(1+0.075)$
8. $\sqrt{x^2y^3}$
9. $\dfrac{a^3\times\sqrt{a^4}}{\sqrt[5]{a^{10}}}$

Puede consultar las respuesta en SageMathCloud.

Leyes de los exponentes y funciones exponenciales

Las leyes de los exponentes se pueden traducir en propiedades de las funciones exponenciales. La idea fundamental es que $\exp_b(x)$ tranforma $\mathbb{R}$, los números reales, con la operación suma en $\mathbb{R}^+$, los reales positivos, con la operación multiplicación.

Leyes de los exponentes	Funciones exponenciales
$b^0 = 1$	$\exp_b(0) = 1$
$b^1 = b$	$\exp_b(1) = b$
$b^{x+y} = b^x b^y$	$\exp_b(x+y) = \exp_b(x) \times \exp_b(y)$
$b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$	$\exp_b(x-y) = \frac{\exp_b(x)}{\exp_b(y)}$
$b^{nx} = [b^x]^n$	$\exp_b(nx) = [\exp_b(x)]^n$

Leyes de los exponentes y funciones exponenciales

Las leyes de los exponentes se pueden traducir en propiedades de las funciones exponenciales. La idea fundamental es que $\exp_b(x)$ tranforma $\mathbb{R}$, los números reales, con la operación suma en $\mathbb{R}^+$, los reales positivos, con la operación multiplicación.

Leyes de los exponentes	Funciones exponenciales
$b^0 = 1$	$\exp_b(0) = 1$
$b^1 = b$	$\exp_b(1) = b$
$b^{x+y} = b^x b^y$	$\exp_b(x+y) = \exp_b(x) \times \exp_b(y)$
$b^{x-y} = \dfrac{b^x}{b^y}$	$\exp_b(x-y) = \dfrac{\exp_b(x)}{\exp_b(y)}$
$b^{nx} = [b^x]^n$	$\exp_b(nx) = [\exp_b(x)]^n$

Definición 5.1.

Sea $b > 0, b \neq 0$ una base y $exp_b(x) = b^x$ la función exponencial en base b; su función inversa es el *logaritmo en base* b y se denota por $log_b(x)$.

Esto quiere decir

$$\begin{cases} log_b\left(exp_b(x)\right) = x & x \in (-\infty, \infty) \\ exp_b\left(log_b(x)\right) = x & x > 0 \end{cases}$$

En otras palabras: Si $y > 0$, entonces

$$exp_b(x) = y \iff x = log_b(y). \tag{5.7}$$

Definición 5.1.

Sea $b > 0, b \neq 0$ una base y $exp_b(x) = b^x$ la función exponencial en base b; su función inversa es el *logaritmo en base* b y se denota por $log_b(x)$.

Esto quiere decir

$$\begin{cases} log_b\left(exp_b(x)\right) = x & x \in (-\infty, \infty) \\ exp_b\left(log_b(x)\right) = x & x > 0 \end{cases}$$

En otras palabras: Si $y > 0$, entonces

$$exp_b(x) = y \iff x = log_b(y). \tag{5.7}$$

Definición 5.1.

Sea $b > 0, b \neq 0$ una base y $exp_b(x) = b^x$ la función exponencial en base b; su función inversa es el *logaritmo en base* b y se denota por $log_b(x)$.

Esto quiere decir

$$\begin{cases} log_b\left(exp_b(x)\right) = x & x \in (-\infty, \infty) \\ exp_b\left(log_b(x)\right) = x & x > 0 \end{cases}$$

En otras palabras: Si $y > 0$, entonces

$$exp_b(x) = y \iff x = log_b(y). \tag{5.7}$$

Definición 5.1.

Sea $b > 0, b \neq 0$ una base y $exp_b(x) = b^x$ la función exponencial en base b; su función inversa es el *logaritmo en base* b y se denota por $log_b(x)$.

Esto quiere decir

$$\begin{cases} log_b\left(exp_b(x)\right) = x & x \in (-\infty, \infty) \\ exp_b\left(log_b(x)\right) = x & x > 0 \end{cases}$$

En otras palabras: Si $y > 0$, entonces

$$exp_b(x) = y \iff x = log_b(y). \tag{5.7}$$

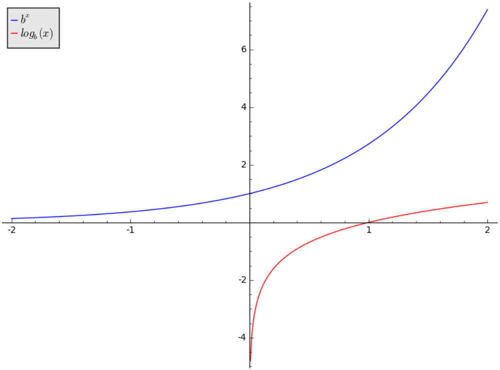


Figura 5.1 : $exp_b(x)$ vs $log_b(x)$

Propiedades de logaritmos

Las funciones logarítmicas *revierten* las operaciones realizadas con las exponenciales: Si $x, y > 0$, entonces

Las funciones logarítmicas...	convierten...	en...
$\log_b(1) = 0$	1	$0.$
$\log_b(b) = 1$	b	$1.$
$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$	la multiplicación	suma.
$\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$	la división	resta.
$\log_b(x^n) = n\log_b(x)$	exponentes	coeficientes.

Ejemplo 5.9.

Simplificar $\log_{10}(1000)$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
\log_{10}(1000) &= \log_{10}\left(10^3\right) \\
&= 3\left(\log_{10}(10)\right) \\
&= 3(1) = 1.
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejemplo 5.9.

Simplificar $\log_{10}(1000)$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_{10}(1000) &= \log_{10}\left(10^3\right)\\ &= 3\left(\log_{10}(10)\right)\\ &= 3(1) = 1.\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 5.10.

Simplificar $\log_2(32)$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_2(32) &= \log_2\left(2^5\right)\\ &= 5\left(\log_2(2)\right)\\ &= 5(1) = 5.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.10.

Simplificar $\log_2(32)$.

Solución.

$$\begin{aligned} \log_2(32) &= \log_2\left(2^5\right) \\ &= 5\left(\log_2(2)\right) \\ &= 5(1) = 5. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.11.

Simplificar $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\log_5\left(\frac{1}{125}\right) &= \log_5\left(\frac{1}{5^3}\right) \\
&= \log_5(1) - \log_5\left(5^3\right) \\
&= 0 - 3\left(\log_5(5)\right) \\
&= -3(1) = -3.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.11.

Simplificar $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_5\left(\frac{1}{125}\right) &= \log_5\left(\frac{1}{5^3}\right)\\ &= \log_5(1) - \log_5\left(5^3\right)\\ &= 0 - 3\left(\log_5(5)\right)\\ &= -3(1) = -3.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.12.

Solucionar $\log_4(x) = \frac{1}{2}$.

Solución.

$$\log_4(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = \exp_4\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\rightarrow x = 4^{\frac{1}{2}}$$
$$\rightarrow x = \sqrt{4} = 2.$$

□

Ejemplo 5.12.

Solucionar $\log_4(x) = \frac{1}{2}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\log_4(x) = \frac{1}{2} &\to x = \exp_4\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\to x = 4^{\frac{1}{2}} \\
&\to x = \sqrt{4} = 2.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.13.

Solucionar $\log_{64}(16) = x$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_{64}(16) = x &\rightarrow 16 = \exp_{64}(x)\\ &\rightarrow 2^4 = 64^x\\ &\rightarrow 2^4 = \left(2^6\right)^x\\ &\rightarrow 2^4 = 2^{6x}\\ &\rightarrow 4 = 6x\\ &\rightarrow x = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 5.13.

Solucionar $\log_{64}(16) = x$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_{64}(16) = x &\to 16 = \exp_{64}(x)\\ &\to 2^4 = 64^x\\ &\to 2^4 = \left(2^6\right)^x\\ &\to 2^4 = 2^{6x}\\ &\to 4 = 6x\\ &\to x = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.14.

Solucionar $\log_x(27) = 3$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_x(27) = 3 &\rightarrow 27 = \exp_x(3)\\ &\rightarrow 27 = x^3\\ &\rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.14.

Solucionar $\log_x(27) = 3$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_x(27) = 3 &\to 27 = \exp_x(3)\\ &\to 27 = x^3\\ &\to x = \sqrt[3]{27} = 3.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.15.

Reescriba las siguientes expresiones en términos de $\log_5(2)$ y $\log_5(3)$:

1. $\log_5\left(\frac{5}{3}\right)$;
2. $\log_5(8)$;
3. $\log_5(36)$.

Ejemplo 5.15.

Reescriba las siguientes expresiones en términos de $\log_5(2)$ y $\log_5(3)$:

1. $\log_5\left(\frac{5}{3}\right)$;
2. $\log_5(8)$;
3. $\log_5(36)$.

Ejemplo 5.15.

Reescriba las siguientes expresiones en términos de $\log_5(2)$ y $\log_5(3)$:

1. $\log_5\left(\frac{5}{3}\right)$;
2. $\log_5(8)$;
3. $\log_5(36)$.

Ejemplo 5.15.

Reescriba las siguientes expresiones en términos de $\log_5(2)$ y $\log_5(3)$:

1. $\log_5\left(\frac{5}{3}\right);$
2. $\log_5(8);$
3. $\log_5(36).$

Solución.

1.
$$\log_5\left(\frac{5}{3}\right) = \log_5(5) - \log_5(3) = 1 - \log_5(3).$$

2.
$$\log_5(8) = \log_5\left(2^3\right) = 3\log_5(5) = 3.$$

3.
$$\log_5(36) = \log_5\left(2^2 3^2\right) = 2\log_5(2) + 2\log_5(3).$$

$\square$

Solución.

1.
$$\log_5\left(\frac{5}{3}\right) = \log_5(5) - \log_5(3) = 1 - \log_5(3).$$

2.
$$\log_5(8) = \log_5\left(2^3\right) = 3\log_5(5) = 3.$$

3.
$$\log_5(36) = \log_5\left(2^2 3^2\right) = 2\log_5(2) + 2\log_5(3).$$

Solución.

1

$$\log_5\left(\frac{5}{3}\right) = \log_5(5) - \log_5(3) = 1 - \log_5(3).$$

2

$$\log_5(8) = \log_5\left(2^3\right) = 3\log_5(5) = 3.$$

3

$$\log_5(36) = \log_5\left(2^2 3^2\right) = 2\log_5(2) + 2\log_5(3).$$

$\square$

Solución.

1. $$\log_5\left(\frac{5}{3}\right) = \log_5(5) - \log_5(3) = 1 - \log_5(3).$$

2. $$\log_5(8) = \log_5\left(2^3\right) = 3\log_5(5) = 3.$$

3. $$\log_5(36) = \log_5\left(2^2 3^2\right) = 2\log_5(2) + 2\log_5(3).$$

$\square$

Consideremos una inversión inicial de $\$1$, a una tasa de interés anual de $r = 1$, a un plazo de $T = 1$, es decir, de un año. Si variamos el número de periodos M, en el que se compone la inversión al año, obtenemos los siguientes resultados:

M	$(1 + 1/M)^M$
1	2.0
10	2.5937424601
100	2.70481382942
1000	2.71692393224
10000	2.71814592683

Como se puede observar,

$$\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M} \rightarrow 2.71828182846$$

si $M \rightarrow \infty$.

Observación 5.1.

$e \approx 2.71828182846$ se llama constante de Euler y al logaritmo base e se le llama *logaritmo natura* y se denota por $\ln(x)$.

Como se puede observar,

$$\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M} \to 2.71828182846$$

si $M \to \infty$.

Observación 5.1.

$e \approx 2.71828182846$ se llama constante de Euler y al logaritmo base e se le llama *logaritmo natura* y se denota por $\ln(x)$.

En general, realizando el cambio de variable $M = \dfrac{N}{r}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
A(1+\frac{r}{N})^{NT} &= A(1+\frac{1}{M})^{rMT} \\
&= A\left(\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M}\right)^{rT} \\
&\to Ae^{rT}
\end{aligned}
$$

cuando $N, M \to \infty$.

Observación 5.2.

Esta es la motivacación de la fórmula de *interés compuesto continuamente.*

Ejemplo 5.16.

Resuelva $3 = e^{20x}$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
3 = e^{20x} &\to \ln(3) = \ln(e^{20x}) \\
&\to \ln(3) = 20x \\
&\to x = \frac{\ln(3)}{20} \approx 0.0549
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejemplo 5.16.

Resuelva $3 = e^{20x}$.

Solución.

$$\begin{aligned} 3 = e^{20x} &\to \ln(3) = \ln(e^{20x}) \\ &\to \ln(3) = 20x \\ &\to x = \frac{\ln(3)}{20} \approx 0.0549 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.17.

Resuelva $2\ln(x) = 1$

Solución.

$$
\begin{aligned}
2\ln(x) = 1 &\to \ln(x) = \frac{1}{2} \\
&\to x = \exp(\frac{1}{2}) \\
&\to x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1.648
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 5.17.

Resuelva $2\ln(x) = 1$

Solución.

$$
\begin{aligned}
2\ln(x) = 1 &\rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \\
&\rightarrow x = \exp(\frac{1}{2}) \\
&\rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1.648
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejemplo 5.18.

Considere una inversión inicial $C_0 = \$1,000$, a una tasa anual $r = 8\,\%$ compuesta continuamente, ¿a que plazo de T años debe hacerse la inversión, para que esta se duplique?

Solución.

Planteamos la ecuación $1000e^{0.08T} = 2000$. Despejamos T de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1000e^{0.08T} = 2000 &\to e^{0.08T} = 2 \\ &\to 0.08T = \ln(2) \\ &\to T = \frac{\ln(2)}{0.08} \approx 8.66. \end{aligned}$$

El plazo debe ser aprox. 8.66 años. □

Ejemplo 5.18.

Considere una inversión inicial $C_0 = \$1,000$, a una tasa anual $r = 8\,\%$ compuesta continuamente, ¿a que plazo de T años debe hacerse la inversión, para que esta se duplique?

Solución.

Planteamos la ecuación $1000e^{0.08T} = 2000$. Despejamos T de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
1000e^{0.08T} = 2000 &\to e^{0.08T} = 2 \\
&\to 0.08T = \ln(2) \\
&\to T = \frac{\ln(2)}{0.08} \approx 8.66.
\end{aligned}
$$

El plazo debe ser aprox. 8.66 años. $\square$

Observación 5.3.

Observe que el tiempo que se tarda en duplicar el monto, es independiente de la cantidad inicial C_0. Trate de verificar este hecho, con diferentes montón y de justificarlo algebraicamente.

Ejemplo 5.19.

En los siguientes ejericios, evalué la expresión dada utilizando las propiedades de los logaritmos:

1. $\ln e^3$
2. $\ln \sqrt{e}$
3. $e^{\ln 5}$
4. $e^{2\ln 3}$
5. $e^{3\ln 2-2\ln 5}$
6. $\ln \dfrac{e^3\sqrt{e}}{e^{\frac{1}{3}}}$

Ejemplo 5.20.

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $4^x = 53$
2. $\log_3(2x-1) = 2$
3. $2 = e^{0.06x}$
4. $3 = 2 + 5e^{-4x}$
5. $\ln(x) = \frac{1}{3}(\ln 16 + 2\ln 2)$
6. $3^x = e^2$

Ejemplo 5.21.

1. ¿Cuán rápido se duplica el dinero si se invierte a una tasa de interés anual de 6 %, capitalizado continuamente?
2. El dinero depositado en cierto banco se duplica cada 13 años. El banco capitaliza el interés continuamente. ¿Qué tasa de interés anual ofrece el banco?
3. Si una cantidad que gana interés capitalizando continuamente tarda 12 años en duplicar su valor, ¿cuánto tardará en tripicarlo?

Ejemplo 5.21.

1. ¿Cuán rápido se duplica el dinero si se invierte a una tasa de interés anual de 6 %, capitalizado continuamente?
2. El dinero depositado en cierto banco se duplica cada 13 años. El banco capitaliza el interés continuamente. ¿Qué tasa de interés anual ofrece el banco?
3. Si una cantidad que gana interés capitalizando continuamente tarda 12 años en duplicar su valor, ¿cuánto tardará en tripicarlo?

Ejemplo 5.21.

1. ¿Cuán rápido se duplica el dinero si se invierte a una tasa de interés anual de $6\,\%$, capitalizado continuamente?
2. El dinero depositado en cierto banco se duplica cada 13 años. El banco capitaliza el interés continuamente. ¿Qué tasa de interés anual ofrece el banco?
3. Si una cantidad que gana interés capitalizando continuamente tarda 12 años en duplicar su valor, ¿cuánto tardará en tripicarlo?

Ejemplo 5.21.

1. ¿Cuán rápido se duplica el dinero si se invierte a una tasa de interés anual de 6 %, capitalizado continuamente?
2. El dinero depositado en cierto banco se duplica cada 13 años. El banco capitaliza el interés continuamente. ¿Qué tasa de interés anual ofrece el banco?
3. Si una cantidad que gana interés capitalizando continuamente tarda 12 años en duplicar su valor, ¿cuánto tardará en tripicarlo?

Ejemplo 5.22.

Determine el valor de las incógnitas en las siguientes ecuaciones.

1. $5^{x+1} = 3^{2x}$
2. $100^{2/x} = (1+0.1)^x$
3. $250 = 5\dfrac{(1+0.01)^y - 1}{0.01}$

Puede comprobar las respuestas en SageMathCloud.

Definición 6.1.

Una sucesión de número es una regla que asigna a cada número entero positivo $n \in \mathbb{N}$, un número real que denotaremos por a_n.

Ejemplo 6.1.

La sucesión $1, 0, 1, 0...$ se puede escribir con la regla

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si n es impar} \\ 0 & \text{si n es par} \end{cases}$$

o de manera explicita

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 0...$$

Definición 6.2.

Una sucesión es *aritmética* si para $n \in \mathbb{N}$, la diferencia entre dos términos sucesivos es siempre la misma, es decir,

$$a_{n+1} - a_n \equiv d,$$

donde d es una constante.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión aritmética, tal que $a_{n+1} - a_n \equiv d$, entonces

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d \tag{6.1}$$

es una fórmula para el $n-$ ésimo término.

La fórmula para encontrar la suma hasta el $n-$ésimo término de una sucesión aritmética a_n está dada por

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right). \tag{6.2}$$

Ejemplo 6.2.

1. Encuentre el término 100 de la sucesión aritmética $3, 7, 11, \ldots$
2. Encuentre la suma hasta este término.

Como $7-3=11-7=...=4$, entonces $d=4$, mientras que el primer término es $a_1=3$. Entonces la fórmula para esta sucesión es

$$a_n=3+(n-1)4.$$

Entonces el término 100 es

$$a_{100}=3+(100-1)4=399.$$

La suma hasta el termino número 100 es

$$S_{100} = \frac{100}{2}(a_1 + a_{100}) = 50\,(3 + 399) = 20100.$$

Evaluación Continua 6.1.

Determine cuales de las siguientes sucesiones son aritméticas. En caso de que sea aritmética, determine una fórmula para dicha sucesión.

1. $1, 6, 11, 16, \ldots$
2. $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$
3. $4, -1, -6, -11, \ldots$
4. $9, 12, 16, \ldots$
5. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Evaluación Continua 6.2.

Si una sucesión en el ejercicio anterior es aritmética, cálcule la suma hasta el sexto término usando la fórmula (6.2).

Definición 6.3.

Una sucesión es *geométrica* si para $n \in \mathbb{N}$, el cociente entre dos términos sucesivos es siempre el mismo, es decir,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \equiv r,$$

donde r es una constante.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión aritmética, tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \equiv r$, entonces

$$a_n = a_1 r^{n-1} \tag{6.3}$$

es una fórmula para el $n-$ ésimo término.

La fórmula para encontrar la suma hasta el $n-$ésimo término de una sucesión aritmética a_n está dada por

$$S_n = \frac{a_1 \left(r^n - 1\right)}{r - 1}. \tag{6.4}$$

Ejemplo 6.3.

1. Encuentre el término 6 de la sucesión geométrica $5, 10, 20, \ldots$
2. Encuentre la suma hasta este término.

Como $\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = ... = 2$, entonces $r = 2$ y como el primer término es $a_1 = 5$, entonces una fórmula para el $n-$ésimo término es

$$a_n = 5\left(2^{n-1}\right).$$

De manera que el término 6 es

$$a_6 = 5(2^{6-1}) = 5 \cdot 2^5 = 160.$$

Sustituyendo $n = 6, r = 2, a_1 = 5$ en la fórmula (6.4) obtenemos

$$S_6 = \frac{5\left(2^6 - 1\right)}{2 - 1} = 315.$$

Evaluación Continua 6.3.

Determine una fórmula para cada una de las siguiente sucesiones geométricas:

1. $3, 6, 12, ...$
2. $-1, 3, -9, ...$
3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, ...$

Evaluación Continua 6.4.

En el ejercicio anterior, calcule la suma de cada sucesión hasta el sexto término, usando la fórmula (6.4).

Series

Una *serie* o *suma infinita* S_∞ es un número tal que

$$S_\infty \approx S_n = a_1 + ... + a_n$$

para n suficientemente grande. En ocasiones, escribiremos

$$S_\infty = a_1 + a_2 + ...$$

Series

Una *serie* o *suma infinita* S_∞ es un número tal que

$$S_\infty \approx S_n = a_1 + ... + a_n$$

para n suficientemente grande. En ocasiones, escribiremos

$$S_\infty = a_1 + a_2 + ...$$

Proposición 6.1.

Si $-1 < r < 1$, *entonces la suma infinita de la sucesión geométrica* $a_n = a_1 r^{n-1}$ *está dada por la fórmula*

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}. \tag{6.5}$$

Ejemplo 6.4.

Encontrar la suma infinita de la sucesión geométrica

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$$

Como

$$\frac{-1/2}{1} = \frac{1/4}{-1/2} = \frac{-1/8}{1/4} = ... = -\frac{1}{2},$$

entonces $r = -\frac{1}{2}$. De manera que la sucesión geométrica está dada por

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Sustituyendo $a_1 = 1, r = -\frac{1}{2}$ en (6.5), obtenemos

$$S_\infty = \frac{2}{3}.$$

¿Qué representa este número?

Sustituyendo $a_1 = 1, r = -\frac{1}{2}$ en (6.5), obtenemos

$$S_\infty = \frac{2}{3}.$$

¿Qué representa este número?

Si consideramos la $n-$ésima suma parcial $S_n = a_1 + ... + a_n$ de nuestra progresión y la comparamos con S_∞ obtenemos las siguientes observaciones:

Suma Parcial S_n	$\lvert S_\infty - S_n \rvert$
$S_1 = 1.0$	0.333
$S_2 = 0.5$	0.163
$S_3 = 0.75$	0.083
$S_4 = 0.625$	0.041
$S_5 = 0.6875$	0.020
$S_6 = 0.65625$	0.010

Como podemos observar, entre más términos sumemos, más nos acercamos a $S_\infty \approx 0.666$. De hecho, para cada margen de error ϵ, podemos escoger un entero N suficientemente grande de manera que si $n > N$, entonces

$$\left|S_n - \frac{2}{3}\right| \leq \epsilon.$$

Para ver realizar un experimento númerico para calcular series geométricas, puede usar este script en SageMathCloud.

El interés compuesto representa la acumulación de intereses que se han generado en un período determinado por un capital inicial o principal a una tasa de interés durante ciertos periodos de imposición, de modo que los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión no se retiran sino que se reinvierten o añaden al capital inicial, es decir, se capitalizan.[1]

[1] Interés compuesto. (2016, 21 de abril). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 20:36, mayo 2, 2016 desde https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Inter%C3%A9s_compuesto&oldid=906

Para un capital inicial C_0, compuesto durante T años, N periodos al año, a una *tasa de interés anual* r, el capital final $C(T)$ está dado por

$$C(T) = C_0 \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{NT}. \tag{6.6}$$

Ejemplo 6.5.

Si se invierten $C_0 = \$400$, a una tasa de interés de $r = 6\,\%$ a un plazo de $T = 5$ años, calcule el monto al final del plazo si la inversión se compone:

1. Anualmente
2. Semestralmente
3. Mensualmente
4. Diariamente

1. $N = 1$
$$C(5) = \left(1 + \frac{0.06}{1}\right)^{1\times 5} = 535.2902310$$
2. $N = 2$
$$C(5) = \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{2\times 5} = 537.5665517$$
3. $N = 12$
$$C(5) = \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12\times 5} = 539.5400610$$
4. $N = 360$
$$C(5) = \left(1 + \frac{0.06}{360}\right)^{360\times 5} = 539.9300261$$

Como puede observar a partir del ejercicio anterior, cuando N se incrementa, $C(T)$ se aproxima más a una cantidad fija ≈ 539.94. Para el límite $N \to \infty$, diremos que el interés se compone *continuamente* y esta dado por la fórmua

$$C(T) = C_0 e^{rT}. \quad (6.7)$$

En el ejemplo anterior, $C(5) = 400e^{0.06\times 5} = 539.9435230.$

Evaluación Continua 6.5.

Si se invierten C_0, a una tasa de interés de r a un plazo de $T =$ años, calcule el monto al final del plazo si la inversión se compone:

1. Anualmente
2. Semestralmente
3. Mensualmente
4. Diariamente
5. Continuamente

en los siguientes casos:

(a) $C_0 = 1000, r = 5\,\%, T = 10;$

(b) $C_0 = 8750, r = 1\,\%, T = 2;$

(c) $C_0 = 340, r = 12\,\%, T = 15.$

Puede verificar sus resultados, usando este script en SageMathCloud.

7 Interés simple
- Monto
- Valor actual o presente
- Interés
- Tasa y tipo de interés
- Plazo o tiempo
- Tiempo real y tiempo aproximado
- Descuento
- Ecuaciones de valores equivalentes

8 Interés Compuesto
- Tasas de nominal y efectiva de interés
- Valor presente
- Ecucaciones de valor

El monto M de una inversión se calcula sumando el capital inicial C_0 y el interés I :

$$M = C_0 + I. \tag{7.1}$$

Si el interés es simple, a una tasa de interés anual r, en un plazo de T años, el interés se calcula proporcinal al capital inicial:

$$I = C_0 r T \tag{7.2}$$

De esta manera, el monto final de la inversión está dado por

$$M = C_0 + C_0 r T, \tag{7.3}$$

o de manera más concreta

$$M = C_0 (1 + rT). \tag{7.4}$$

El monto M de una inversión se calcula sumando el capital inicial C_0 y el interés I :

$$M = C_0 + I. \tag{7.1}$$

Si el interés es simple, a una tasa de interés anual r, en un plazo de T años, el interés se calcula proporcinal al capital inicial:

$$I = C_0 r T \tag{7.2}$$

De esta manera, el monto final de la inversión está dado por

$$M = C_0 + C_0 r T, \tag{7.3}$$

o de manera más concreta

$$M = C_0 (1 + rT). \tag{7.4}$$

El monto M de una inversión se calcula sumando el capital inicial C_0 y el interés I :

$$M = C_0 + I. \tag{7.1}$$

Si el interés es simple, a una tasa de interés anual r, en un plazo de T años, el interés se calcula proporcinal al capital inicial:

$$I = C_0 r T \tag{7.2}$$

De esta manera, el monto final de la inversión está dado por

$$M = C_0 + C_0 r T, \tag{7.3}$$

o de manera más concreta

$$M = C_0 \left(1 + rT\right). \tag{7.4}$$

Ejemplo 7.1.

Un comerciante adquiere un lote de mercancía con valor de \$3 500 que acuerda liquidar mediante un pago de inmediato de \$1500 y un pago final 4 meses después. Acepta pagar 10 %de interés anual simple sobre el saldo. ¿Cuánto deberá pagar dentro de 4 meses?

Ejemplo 7.2.

Una persona deposita \$150 000 en un fondo de inversiones bursátiles que garantiza un rendimiento de 0.8 % mensual. Si retira su depósito 24 días después, ¿cuánto recibe?

El valor actual, que equivale al capital, se puede encontrar despejando C en la fórmula del monto (7.4), como sigue:

$$C_0 = \frac{M}{1 + rT} \tag{7.5}$$

Ejemplo 7.3.

Una persona participa en una "tanda" y le toca cobrar en el decimoctavo mes. Si dentro de 18 meses recibirá \$30 000, ¿cuál es el valor actual de su tanda, con un interés simple de 20 % anual?

Ejemplo 7.4.

Un individuo compró un automóvil nuevo por el cual pagó \$195 000 el primero de enero, y lo vende el primero de junio del año siguiente en \$256 000. Aparte del uso que ya le dio, del seguro que pagó, otros gastos que hizo, considerando sólo los valores de compra y venta, ¿fue una inversión conveniente la operación que realizó si la tasa de interés de mercado era de 11 %?

Ejemplo 7.5.

Una persona obtiene un préstamo de \$50 000 y acepta liquidarlo año y medio después. Acuerda que mientras exista el adeudo pagará un interés simple mensual de 1.5 %. ¿Cuánto deberá pagar de interés cada mes?

Ejemplo 7.6.

Si alguien deposita \$75 000 en una cuenta bancaria que ofrece pagar 1.35 % mensual simple, ¿cuánto recibirá mensualmente de intereses?

Observación 7.1.

La tasa de interés se expresa decimales; si la misma cantidad se expresa en porcentajes, nos referiremos a ésta como tipo de interés. Por ejemplo, si el tipo de interés es $r = 12\,\%$, entonces la tasa de interés es $r = 0.12$.

Observación 7.1.

La tasa de interés se expresa decimales; si la misma cantidad se expresa en porcentajes, nos referiremos a ésta como tipo de interés. Por ejemplo, si el tipo de interés es $r = 12\,\%$, entonces la tasa de interés es $r = 0.12$.

Observación 7.1.

La tasa de interés se expresa decimales; si la misma cantidad se expresa en porcentajes, nos referiremos a ésta como tipo de interés. Por ejemplo, si el tipo de interés es $r = 12\,\%$, entonces la tasa de interés es $r = 0.12$.

Ejemplo 7.7.

Una persona compra un reproductor de discos compactos que cuesta \$1500. Paga un enganche de \$800 y acuerda pagar otros \$750 tres meses después. ¿Qué tipo de interés simple pagó?

Ejemplo 7.8.

Una persona compró un automóvil el 1 de enero en $195 000 y lo vendió 17 meses después en $256 000. ¿Qué tasa de interés simple anual le rindió su inversión?

Ejemplo 7.9.

¿En cuánto tiempo se duplica un capital invertido a una tasa de 19 % de interés anual simple?

Ejemplo 7.10.

¿En cuánto tiempo se acumularían \$5000 si se depositaran hoy \$3 000 en un fondo que paga 1.2 % simple mensual?

Ejemplo 7.11.

¿Cuál será el monto el 24 de diciembre de un capital de \$10 000 depositado el 15 de mayo del mismo año en una cuenta de ahorros que paga 19 % anual simple?

Ejemplo 7.12.

El 11 de julio se firmó un pagaré por \$1 700 con 18 % de interés. ¿En qué fecha los intereses llegarán a \$150?

Descuento

El descuento es una operación de crédito que se lleva a cabo principalmente en instituciones bancarias, que consta en que éstas adquieren letras de cambio o pagarés, de cuyo valor nominal descuentan una suma equivalente a los intereses que devengaría el documento entre la fecha en que se recibe y la fecha del vencimiento. Con esta operación se anticipa el valor actual del documento.

Descuento Simple a una Tasa de Interés

El valor presente C_0 de una cantidad M con vencimiento a una fecha posterior puede ser interpretado como el *valor descontado* de M. A la diferencia $D_r = M - C_0$ se le conoce como *descuento simple de M a una tasa de interés* o *descuento racional sobre M*.

Ejemplo 7.13.

Determinar el valor presente, al 6 % de interés simple, de \$1500 con vencimineto en 9 meses, ¿cuál es su descuento racional?

En este caso, $M = \$1500$, $r = 0.06$ y $T = 9/12 = 3/4$ años.
Sabemos que $M = C_0(1 + rT)$, de manera que el valor presente es

$$C_0 = \frac{M}{1 + rT} = \frac{1500}{1 + (0.06)(3/4)} \approx \$1435.41;$$

y por tanto el descuento racional es
$D_r = S - C = 1500 - 1435.41 = \$64.95.$

Descuento simple a una tasa de descuento

La *tasa de descuento* se define como la razón del descuento dado en la unidad de tiempo (en este caso un año) al capital sobre el cual está dado el descuento.

EL *descuento simple* D (conocido también como *descuento comercial o bancario*) sobre unan cantidad S por t años a la tasa de descuento d está dado porcentajes

$$D = MdT \tag{7.6}$$

y el valor presente de M está dado por

$$C_0 = M - D = M - MdT = M\left(1 - dT\right). \tag{7.7}$$

Ejemplo 7.14.

Hallar el descuento simple sobre una deuda de \$1500 con vencimiento en 9 meses a una *tasa de descuento* de $6\,\%$. ¿Cual es el valor presente de la deuda?

Tenemos $S = 1500$, $d = 0.06$ y $T = 3/4$; de manera que el descuento simple es $D = SdT = 1500(0.06)(3/4)$; mientras que el valor presente es $C = S - D = 1500 - 67.50 = 1432.50$.

Comparando los ejemplos 7.13 y 7.14, es claro que el uso de la tasa de descuento es más sencilla que la de interés; por esta razón en la práctica, es más utilizada la de descuento.
En ocasiones, al descuento comercial se le comonoce como *interés por adelantado.*

Descuento de Pagarés

Un pagaré puede ser vendido una o más veces antes de la fecha de vencimiento. Cada comprador descuenta el valor del documento al vencimiento desde la fecha de la venta hasta la fecha de vencimiento a una *tasa de descuento* fijada.

Ejemplo 7.15.

Observe el pagaré que aparece en la siguiente página. Si el banco realiza operaciones de descuento a 20 % anual, y si el señor Díaz desea descontar el documento el 15 de junio, los $185 000 (el valor nominal del pagaré) devengarán los siguientes intereses (descuento) durante los 2 meses en que se adelanta el valor actual del documento:

$$D = 185000(0.20)(2/12) \approx 6166.67;$$

donde D está dado por la fórmula (7.6), con $M = 185000$, $r = 0.20$ y $T = 2/12$años.

Núm. 0000 México, D.F. a 10 de mayo de 20 XX $ 185 000

Por este PAGARÉ prometo(emos) pagar incondicionalmente a la orden de Alfredo Díaz Villanueva el día 15 de agosto de 20XX la cantidad de ciento ochenta y cinco mil pesos 00/100 valor recibido en mercancía a mi (nuestra) entera satisfacción.

En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obligo(amos) a cubrir % mensual por concepto de intereses moratorios, sin que por eso se entienda prorrogado el plazo. Este documento forma parte de una serie de documentos, por lo que la falta de pago de uno de ellos faculta aplicar el artículo 79 en relación con el No. 174 de la Ley General de Títulos y Operaciones de Crédito.

Alma González Nava

En consecuencia, se aplica el descuento de manera que $C_0 = 185000 - 6166.67 = 178833.33$; por lo que el señor Díaz recibe \$178833.33, que es el *valor (actual) comercial* del documento el 15 de junio, ya que se aplicó un *descuento comercial.*

Ejemplo 7.16.

Una empresa descontó en un banco un pagaré. Recibió \$166 666.67. Si el tipo de descuento es de 30 % y el pagaré vencía 4 meses después de su descuento, ¿cuál era el valor nominal del documento en la fecha de su vencimiento?

Sabemos que

$$M = C_0 + D \tag{7.8}$$
$$D = MdT. \tag{7.9}$$

Si sustuimos (7.9) en (7.8) y despejamos M obtenemos:

$$M = C_o + MdT \tag{7.10}$$
$$\rightarrow \quad M(1 - dT) = C_0 \tag{7.11}$$
$$\rightarrow \quad M = \frac{C_0}{1 - dT}; \tag{7.12}$$

de manera que el valor nominal del documento en la fecha de su vencimiento es

$$M = \frac{\$166,666.67}{1 - (0.30)(4/12)} \approx \$18518.52.$$

Ejemplo 7.17.

Una empresa descuenta un documento por el cual recibe \$945.05. Si el tipo de descuento es de 25 % y el valor nominal del documento era de \$1 000, ¿cuánto tiempo faltaba para el vencimiento?

Sabemos que $M = 1000$, $C_0 = 945.05$, de manera que

$$D = 1000 - 945.05 = 54.95,$$

y $d = 0.25$. Al despejar T de (7.6) obtenemos

$$T = \frac{D}{Md} = \frac{54.95}{(1000)(0.25)} \approx 0.2198\text{años},$$

es decir, aproximadamente 2.64 meses.

Ejemplo 7.18.

Una empresa firma un pagaré por \$120 000 a 90 días, a 25 %. Treinta días después, contrae una deuda por \$100 000 para pagarla 2 meses después, sin intereses. Dos meses después de la primera fecha, acuerda con un acreedor pagar \$150 000 en ese momento y, para saldar el resto de su deuda, hacer un pago final 3 meses después de la última fecha, con interés de 30 %. Determine el pago final convenido.

Operaciones de contratación de deuda	Operaciones de pago
I. \$120 000 a 90 días a 25%	*A.* \$150 000 dos meses después
II. 30 días después \$100 000 a dos meses, sin interés	*B.* Pago final (desconocido), cinco meses después de la primera fecha

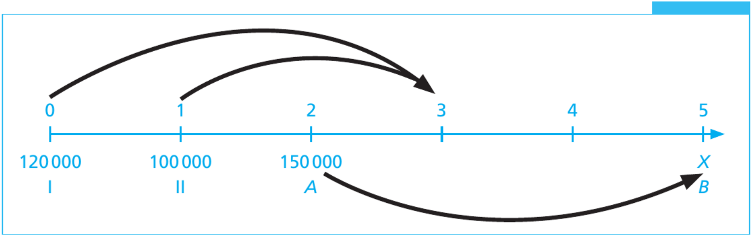


Figura 7.1 : Diagrama de tiempo y valor

$$I + II = A + B$$

$$\begin{aligned} I = 120,000 \times (1 + (0.25)(3/12)) \times (1 + (0.30)(2/12)) &\approx 133875 \\ II = 100,000 \times (1 + (0.30)(2/12)) &\approx 105,000 \\ A = 150,000 \times (1 + (0.30)(3/12)) &\approx 161,250 \\ B &= X \end{aligned}$$

$$133875 + 105000 = 161250 + B \rightarrow B = 77,625$$

Ejemplo 7.19.

Resuelva el ejemplo 7.18 utilizando como fecha focal el cuarto mes, en vez del quinto.

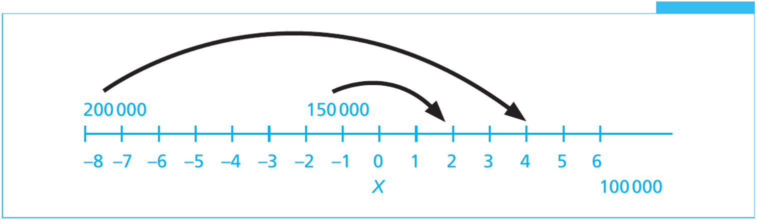
$$I + II = A + B$$

$$\begin{aligned} I = 120,000 \times (1 + (0.25)(3/12)) \times (1 + (0.30)(1/12)) &\approx 130,687.50 \\ II = 100,000 \times (1 + (0.30)(1/12)) &\approx 102,500 \\ A = 150,000 \times (1 + (0.30)(2/12)) &\approx 157,500 \\ B = \frac{X}{1 + (0.30)(1/12)} & \end{aligned}$$

$$130,687.50 + 102,500 = 157,500 + \frac{X}{1.0250} \to X = 77,579.69.$$

Ejemplo 7.20.

Una persona contrajo una deuda hace 8 meses por \$200 000 con 40 % de interés simple, que vence dentro de 4 meses. Además debe pagar otra deuda de \$150 000 contraída hace 2 meses, con 35 % de interés simple y que vence dentro de dos meses. Considerando un interés de 42 %, ¿qué pago deberá hacer hoy para saldar sus deudas, si se compromete a pagar \$100 000 dentro de 6 meses?


200 000
150 000
–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6
X
100 000

$I + II = A + B$

$$I = \frac{200,000 \times (1 + (0.40)(12/12))}{(1 + (0.42)(4/12))} \approx 245,614.04$$
$$II = \frac{150,000 \times (1 + (0.35)(4/12))}{(1 + (0.42)(2/12))} \approx 156,542.05$$
$$A = \frac{100,000}{1 + (0.42)(6/12)} = 82,644.63$$
$$B = X$$

$$X = 319,511.47.$$

En aquellas transacciones que abarcan un periodo largo de tiempo, el interés puede ser manejado de dos maneras:

- A intervalos establcidos, el interés vencido se paga mediante cheque o cupones. El capital que produce los intereses permance sin cambio durante el plazo de la transacción. EN este caso, estamos tratando con interés simple.
- A intervalos establecidos, el interés vencido es agregado al capital (por ejemplo, en las cuentas de ahorro). En este caso, se dice que el interés es *capitalizable o convertible en capital;* en consecuencia, gana interés. El capital aumenta periódicamente, y el interés convertible en capital también aumenta periódicamente durante el periodo de la transacción. La suma vencida al final de la transacción es conocida como *monto compuesto*; a la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le conoce como *interés compuesto*.

En aquellas transacciones que abarcan un periodo largo de tiempo, el interés puede ser manejado de dos maneras:

- A intervalos establcidos, el interés vencido se paga mediante cheque o cupones. El capital que produce los intereses permance sin cambio durante el plazo de la transacción. EN este caso, estamos tratando con interés simple.
- A intervalos establecidos, el interés vencido es agregado al capital (por ejemplo, en las cuentas de ahorro). En este caso, se dice que el interés es *capitalizable o convertible en capital;* en consecuencia, gana interés. El capital aumenta periódicamente, y el interés convertible en capital también aumenta periódicamente durante el periodo de la transacción. La suma vencida al final de la transacción es conocida como *monto compuesto;* a la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le conoce como *interés compuesto.*

En aquellas transacciones que abarcan un periodo largo de tiempo, el interés puede ser manejado de dos maneras:

- A intervalos establcidos, el interés vencido se paga mediante cheque o cupones. El capital que produce los intereses permance sin cambio durante el plazo de la transacción. EN este caso, estamos tratando con interés simple.
- A intervalos establecidos, el interés vencido es agregado al capital (por ejemplo, en las cuentas de ahorro). En este caso, se dice que el interés es *capitalizable o convertible en capital;* en consecuencia, gana interés. El capital aumenta periódicamente, y el interés convertible en capital también aumenta periódicamente durante el periodo de la transacción. La suma vencida al final de la transacción es conocida como *monto compuesto;* a la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le conoce como *interés compuesto.*

En aquellas transacciones que abarcan un periodo largo de tiempo, el interés puede ser manejado de dos maneras:

- A intervalos establcidos, el interés vencido se paga mediante cheque o cupones. El capital que produce los intereses permance sin cambio durante el plazo de la transacción. EN este caso, estamos tratando con interés simple.
- A intervalos establecidos, el interés vencido es agregado al capital (por ejemplo, en las cuentas de ahorro). En este caso, se dice que el interés es *capitalizable o convertible en capital;* en consecuencia, gana interés. El capital aumenta periódicamente, y el interés convertible en capital también aumenta periódicamente durante el periodo de la transacción. La suma vencida al final de la transacción es conocida como *monto compuesto;* a la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le conoce como *interés compuesto.*

Ejemplo 8.1.

1. Hallar el interés simple sobre \$1,000 por 3 años, a 5 % de interés.
2. Hallar el interés compuesto sobre \$1,000 por 3 años, si el interés de 5 % es convertible anualmente (en capital).

Definición 8.1.

1. El número de veces que el interés se convierte en un año se conoce como frecuencia de conversión.
2. El periodo de tiempo entre dos conversiones sucesivas se conoce como periodo de interés o conversión.

Definición 8.1.

1. El número de veces que el interés se convierte en un año se conoce como frecuencia de conversión.
2. El periodo de tiempo entre dos conversiones sucesivas se conoce como periodo de interés o conversión.

Definición 8.1.

1. El número de veces que el interés se convierte en un año se conoce como frecuencia de conversión.
2. El periodo de tiempo entre dos conversiones sucesivas se conoce como periodo de interés o conversión.

Observación 8.1.

La tasa de interés se establece normalmente como tasa anual; de otra forma, la frecuencia de conversión se debe indicar explicitamente. En general, la tasa anual se denota por r; mientras que la tasa por periodo de conversión se denota por i y está dada por

$$i = \frac{r}{N},$$

donde N es la frecuancia de conversión. Si el número de periodos n en el lapso de tiempo T se denota por n, y N es la frecuencia de conversión, entonces

$$n = N \times T.$$

Observación 8.1.

La tasa de interés se establece normalmente como tasa anual; de otra forma, la frecuencia de conversión se debe indicar explicitamente. En general, la tasa anual se denota por r; mientras que la tasa por periodo de conversión se denota por i y está dada por

$$i = \frac{r}{N},$$

donde N es la frecuancia de conversión. Si el número de periodos n en el lapso de tiempo T se denota por n, y N es la frecuencia de conversión, entonces

$$n = N \times T.$$

Observación 8.1.

La tasa de interés se establece normalmente como tasa anual; de otra forma, la frecuencia de conversión se debe indicar explicitamente. En general, la tasa anual se denota por r; mientras que la tasa por periodo de conversión se denota por i y está dada por

$$i = \frac{r}{N},$$

donde N es la frecuancia de conversión. Si el número de periodos n en el lapso de tiempo T se denota por n, y N es la frecuencia de conversión, entonces

$$n = N \times T.$$

Observación 8.1.

La tasa de interés se establece normalmente como tasa anual; de otra forma, la frecuencia de conversión se debe indicar explicitamente. En general, la tasa anual se denota por r; mientras que la tasa por periodo de conversión se denota por i y está dada por

$$i = \frac{r}{N},$$

donde N es la frecuancia de conversión. Si el número de periodos n en el lapso de tiempo T se denota por n, y N es la frecuencia de conversión, entonces

$$n = N \times T.$$

Para un capital inicial C_0, el monto compuesto M al final de un lapso de tiempo T, a una tasa de interés anual r con una frecuencia de conversión N está dado por

$$M = C_0 (1 + i)^n = C_0 \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{NT}, \tag{8.1}$$

Ejemplo 8.2.

El 20 de marzo de 2005 se invirtieron $\$200$ en un fondo que pagaba $5\,\%$ convertible semestralmente. ¿Cuál era el importe del fondo el 20 de septiembre de 2011?

El tiempo no necesariamente tiene que ser un número entero.

Ejemplo 8.3.

Hallar el monto compuesto de \$3,000 en 6 años, 3 meses al 5 %.

Se dice que dos tasas anuales de interés con diferentes periodos de conversión son *equivalentes* si producen el mismo interés compuesto al final de un año.

Ejemplo 8.4.

Al final de un año, el monto compuesto de \$100 al

1. 4 % convertible trimestralmente es $100(1.01)^4$
2. es equivalente a 4.06 % simple.

Cuando el interés es covnertible más de una vez al año, la tasa anual dada se conoce como *tasa nominal anual.*
La tasa de interés efectivamente ganada en un año se conoce como *tasa efectiva anual.*

Ejemplo 8.5.

Hallar la tasa efectiva de interés equivalente a una tasa nominal de 5 % convertible mensualmente.

Ejemplo 8.6.

Hallas la tasa nominal convertible trimestralmente equivalente a una tasa efectiva de 5 %.

Ejemplo 8.7.

¿A qué tasa nominal convertible semestralmente, el monto de \$100 será \$215 en 15.5 años?

Ejemplo 8.8.

¿A qué tasa nominal convertible trimestralmente, el monto de \$1250 será \$1900 en 10 años?

Ejemplo 8.9.

¿En que tiempo el monto de \$2000 será \$3650 al 4 % convertible semestralmente?

A partir de la ecuación (8.1), obtenemos

$$C_0 = M (1+i)^{-n}; \tag{8.2}$$

diremos que C_0 es el *valor presente* de M y que $(1+i)^{-n}$ es el *factor de descuento*.

Ejemplo 8.10.

Hallar el valor presente de \$2000, pagaderos en 6 años, suponiendo un rendimiento a la tasa de 5 % convertible semestralmente.

Para hallar el velor presente de un pagaré con intereses, hallar:

1. el monto de la deuda al vencimiento;
2. el valor presente del monto encontrado en el inciso anterior.

Ejemplo 8.11.

Suponiendo una tasa de rendimiento efectivo de 4 %, hallar el valor presente de una deuda de $2500 contratada con intéreses al 6 % convertible trimestralmente, pagadera en 8 años.

Ejemplo 8.12.

Hallar el valor presente de \$3000 pagaderos en 8 años 10 meses, suponiendo un rendimiento de 4 % convertible trimestralmente.

Una *ecuación de valor* se obtine igualando en una fecha de comparación o fecha focal, la suma de una conjunto de obligaciones con otro conjunto de obligaciones.

Ejemplo 8.13.

Una persona le debe al banco $\$1000$ pagaderos en 2 años, y $\$3000$ pagaderos en 5 años; acuerdan que liquide sus deudas mediante un pago único al final de 3 años sobre la base de un rendimiento de 6 % convertible semestral.

Ejemplo 8.14.

Una persona debe \$1000 pagaderos en 1 año y \$3000 pagaderos en 4 años; acuerdan pagar de inmediato \$2000 de inmediato y elr esto en 2 años. ¿Cuánto tendrá que pagar al final del 2o. año suponiendo un rendimiento de 5 % convertible semestralmente?

La fecha en la cual un conjunto de obligaciones, con vencimiento en fechas diferentes puede ser liquidado mediante un pago único igual a la suma de las distintas deudas, se conoce como *fecha de vencimiento promedio* de las deudas. El tiempo por transcurrir hasta dicha fecha se conoce como *tiempo equivalente.*

Ejemplo 8.15.

¿Cuál es el tiempo equivalente para el pago de unas deudas de \$1000 con vencimiento en 1 año, y \$3000 con vencimiento en 2 años suponiendo un rendimiento de 4 % convertible trimestralmente?

Definición 9.1.

Una anualidad es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo.

Por ejemplo:

1. abonos semanales;
2. pagos de renta mensuales;
3. dividendos trimestrales sobre acciones;
4. pagos semestrales de interés sobre bonos;
5. primas anuales en pólizas de seguros de vida, etc.

Definición 9.1.

Una anualidad es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo.

Por ejemplo:

1. abonos semanales;
2. pagos de renta mensuales;
3. dividendos trimestrales sobre acciones;
4. pagos semestrales de interés sobre bonos;
5. primas anuales en pólizas de seguros de vida, etc.

Definición 9.1.

Una anualidad es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo.

Por ejemplo:

1. abonos semanales;
2. pagos de renta mensuales;
3. dividendos trimestrales sobre acciones;
4. pagos semestrales de interés sobre bonos;
5. primas anuales en pólizas de seguros de vida, etc.

Definición 9.1.

Una anualidad es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo.

Por ejemplo:

1. abonos semanales;
2. pagos de renta mensuales;
3. dividendos trimestrales sobre acciones;
4. pagos semestrales de interés sobre bonos;
5. primas anuales en pólizas de seguros de vida, etc.

Definición 9.1.

Una anualidad es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo.

Por ejemplo:

1. abonos semanales;
2. pagos de renta mensuales;
3. dividendos trimestrales sobre acciones;
4. pagos semestrales de interés sobre bonos;
5. primas anuales en pólizas de seguros de vida, etc.

Definición 9.1.

Una anualidad es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo.

Por ejemplo:

1. abonos semanales;
2. pagos de renta mensuales;
3. dividendos trimestrales sobre acciones;
4. pagos semestrales de interés sobre bonos;
5. primas anuales en pólizas de seguros de vida, etc.

El tiempo transcurrido entre cada pago sucesivo de la anualidad se conoce como *intervalo de pago.* El tiempo contado desde el principio del primer intervalo de pago hasta el final del último se conoce como *plazo de la anualidad.* La suma de todos los pagos hechos en un año se conoce como renta anual; por ejemplo, una renta anual de \$2000 pagaderos trimestralmente significa un pago de \$500 cada tres meses.

El tiempo transcurrido entre cada pago sucesivo de la anualidad se conoce como *intervalo de pago.* El tiempo contado desde el principio del primer intervalo de pago hasta el final del último se conoce como *plazo de la anualidad.* La suma de todos los pagos hechos en un año se conoce como renta anual; por ejemplo, una renta anual de $2000 pagaderos trimestralmente significa un pago de $500 cada tres meses.

El tiempo transcurrido entre cada pago sucesivo de la anualidad se conoce como *intervalo de pago.* El tiempo contado desde el principio del primer intervalo de pago hasta el final del último se conoce como *plazo de la anualidad.* La suma de todos los pagos hechos en un año se conoce como renta anual; por ejemplo, una renta anual de $2000 pagaderos trimestralmente significa un pago de $500 cada tres meses.

Una *anualidad cierta* es una anualidad en la cual los pagos principian y terminan en fechas fijas.

Una *anualidad contingente* es aquella ene la cual el plazo depende de algún suceso cuya realización no puede fijarse.

Una serie predeterminada de pagos periódicos forman una anualidad cierta; ya que los pagos periódicos de primas en el seguro de vida terminan al ocurrir la muerte del asegurado, éstos forman una anuallidad contingente.

Una *anualidad cierta* es una anualidad en la cual los pagos principian y terminan en fechas fijas.

Una *anualidad contingente* es aquella ene la cual el plazo depende de algún suceso cuya realización no puede fijarse.

Una serie predeterminada de pagos periódicos forman una anualidad cierta; ya que los pagos periódicos de primas en el seguro de vida terminan al ocurrir la muerte del asegurado, éstos forman una anuallidad contingente.

Una *anualidad cierta* es una anualidad en la cual los pagos principian y terminan en fechas fijas.

Una *anualidad contingente* es aquella ene la cual el plazo depende de algún suceso cuya realización no puede fijarse.

Una serie predeterminada de pagos periódicos forman una anualidad cierta; ya que los pagos periódicos de primas en el seguro de vida terminan al ocurrir la muerte del asegurado, éstos forman una anuallidad contingente.

Una *anualidad cierta* es una anualidad en la cual los pagos principian y terminan en fechas fijas.
Una *anualidad contingente* es aquella ene la cual el plazo depende de algún suceso cuya realización no puede fijarse.
Una serie predeterminada de pagos periódicos forman una anualidad cierta; ya que los pagos periódicos de primas en el seguro de vida terminan al ocurrir la muerte del asegurado, éstos forman una anuallidad contingente.

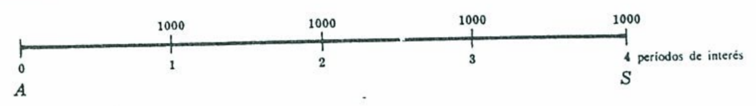
Una *anualidad cierta ordinaria* es aquella en la cual los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago, es decir, que el primer pago se hace al final del primer intervalo de pago, el segundo al final del segundo de intervalo de pago, y así sucesivamente.

En esta sección, todas las anualidad serán anualidades ciertas ordinarias. Sin embargo, consideraremos únicamente el *caso simple*, esto es, anualidades en las cuales el intervalo de pago y periodo de interés coinciden.

Una *anualidad cierta ordinaria* es aquella en la cual los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago, es decir, que el primer pago se hace al final del primer intervalo de pago, el segundo al final del segundo de intervalo de pago, y así sucesivamente.
En esta sección, todas las anualidad serán anualidades ciertas ordinarias. Sin embargo, consideraremos únicamente el *caso simple*, esto es, anualidades en las cuales el intervalo de pago y periodo de interés coinciden.

Una *anualidad cierta ordinaria* es aquella en la cual los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago, es decir, que el primer pago se hace al final del primer intervalo de pago, el segundo al final del segundo de intervalo de pago, y así sucesivamente.
En esta sección, todas las anualidad serán anualidades ciertas ordinarias. Sin embargo, consideraremos únicamente el *caso simple*, esto es, anualidades en las cuales el intervalo de pago y periodo de interés coinciden.

Consideremos una anualidad ordinaria de \$1000 anuales durante 4 años al 5 %.



El monto S_n de la anualidad es la suma de los *montos compuestos* de los distindos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo:

$$\begin{cases} P_k = P(1+i)^{n-k}, \qquad k = 1, ..., n \\ S_n = P_1 + ... + P_n. \end{cases} \tag{9.1}$$

En nuestro ejemplo, $P = 1000$, $i = 0.05$ y n=4; por tanto $S_4 = 1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + (1.05)^3$.

El monto S_n de la anualidad es la suma de los *montos compuestos* de los distindos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo:

$$\begin{cases} P_k = P(1+i)^{n-k}, \quad k = 1, ..., n \\ S_n = P_1 + ... + P_n. \end{cases} \tag{9.1}$$

En nuestro ejemplo, $P = 1000$, $i = 0.05$ y n=4; por tanto $S_4 = 1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + (1.05)^3$.

El monto S_n de la anualidad es la suma de los *montos compuestos* de los distindos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo:

$$\begin{cases} P_k = P(1+i)^{n-k}, \quad & k = 1, ..., n \\ S_n = P_1 + ... + P_n. \end{cases} \tag{9.1}$$

En nuestro ejemplo, $P = 1000$, $i = 0.05$ y n=4; por tanto $S_4 = 1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + (1.05)^3.$

Por (6.4), tenemos que

$$S_n = P\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \tag{9.2}$$

y aplicado a nuestro ejemplo, obtenemos

$$S_4 = 1000\frac{(1.05)^4 - 1}{(1.05) - 1} \approx \$4310.12$$

Por (6.4), tenemos que

$$S_n = P\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \tag{9.2}$$

y aplicado a nuestro ejemplo, obtenemos

$$S_4 = 1000\frac{(1.05)^4 - 1}{(1.05) - 1} \approx \$4310.12$$

El *valor presente* de A de una anualidad es la suma de los valores presentes de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo, es decir,

$$\begin{cases} V^k = \dfrac{P}{(1+i)^k}, & k = 1, ..., n \\ A = V^1 + ... + V^n. \end{cases} \tag{9.3}$$

El *valor presente* de A de una anualidad es la suma de los valores presentes de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo, es decir,

$$\begin{cases} V^k = \dfrac{P}{(1+i)^k}, & k = 1, ..., n \\ A = V^1 + ... + V^n. \end{cases} \tag{9.3}$$

Observación 9.1.

$$V^k = \frac{P}{(1+i)^k} = P(1+i)^{-k}.$$

En nuestro ejemplo, el valor presente del último pago $(k = 4)$ es

$$V^4 = 1000(1 + 0.05)^{-4} = 1000(1.05)^{-4} \approx 822.70.$$

Observación 9.1.

$$V^k = \frac{P}{(1+i)^k} = P(1+i)^{-k}.$$

En nuestro ejemplo, el valor presente del último pago ($k = 4$) es

$$V^4 = 1000(1+0.05)^{-4} = 1000(1.05)^{-4} \approx 822.70.$$

Observación 9.2.

Por (6.4), tenemos que

$$A = \frac{P}{(1+i)^n}\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \tag{9.4}$$

y por tanto, usando (9.2)

$$A = \frac{S_n}{(1+i)^n}. \tag{9.5}$$

En efecto, A es el valor presente de S_n, a una tasa anual i en un plazo de n años.

Observación 9.2.

Por (6.4), tenemos que

$$A = \frac{P}{(1+i)^n} \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \tag{9.4}$$

y por tanto, usando (9.2)

$$A = \frac{S_n}{(1+i)^n}. \tag{9.5}$$

En efecto, A es el valor presente de S_n, a una tasa anual i en un plazo de n años.

Observación 9.2.

Por (6.4), tenemos que

$$A = \frac{P}{(1+i)^n} \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \tag{9.4}$$

y por tanto, usando (9.2)

$$A = \frac{S_n}{(1+i)^n}. \tag{9.5}$$

En efecto, A es el valor presente de S_n, a una tasa anual i en un plazo de n años.

El mismo análisis es válido si interpretamos i como tasa por periodo de conversión y n como el número de periodos de conversión, es decir, si r es la tasa de interés anual, N la frecuencia de periodos de conversión por año y T el plazo en años, entonces

$$i = \frac{r}{N}, n = N \times T.$$

En ese caso, P sería el pago (nominal) fijo por realizado por periodo de conversión.

El mismo análisis es válido si interpretamos i como tasa por periodo de conversión y n como el número de periodos de conversión, es decir, si r es la tasa de interés anual, N la frecuencia de periodos de conversión por año y T el plazo en años, entonces

$$i = \frac{r}{N}, n = N \times T.$$

En ese caso, P sería el pago (nominal) fijo por realizado por periodo de conversión.

El mismo análisis es válido si interpretamos i como tasa por periodo de conversión y n como el número de periodos de conversión, es decir, si r es la tasa de interés anual, N la frecuencia de periodos de conversión por año y T el plazo en años, entonces

$$i = \frac{r}{N}, n = N \times T.$$

En ese caso, P sería el pago (nominal) fijo por realizado por periodo de conversión.

Ejemplo 9.1.

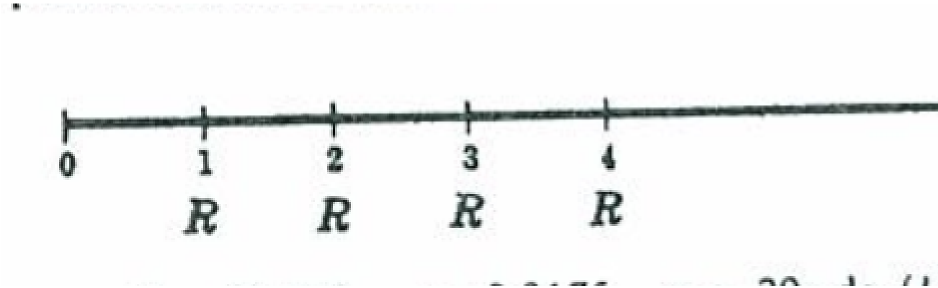
Hallar el monto y valor presente de una anualidad de \$150 mensuales, durante durante 3 años y medio al 6 % convertible mensualmente.

Ejemplo 9.2.

Hallar el monto y valor presente de una anualidad de \$2275 cada 6 meses, durante 8 años y 6 meses al 5.4 % convertible semestralmente.

Ejemplo 9.3.

¿Cuál tiene que ser el importe de cada uno de los depósitos semestrales que deberán hacerse en una cuenta de ahorros que paga el 3.5 % convertible semestralmente, durante 10 años para que el monto sea de $25000, precisamente después del último depósito?


0
1
2
3
4
R
R
R
R

Ejemplo 9.4.

Tres meses antes de ingresar al colegio, un estudiante recibe \$10,000, los cuales son invertidos al 4 % convertible trimestralmente. ¿Cuál es el importe de cada uno de los retiros trimestrales que podrá hacer durante 4 años, iniciando el primero, transcurrido 3 meses?


10.000
0
1
2
3
4
R
R
R
R
16 periodos de interés
R

Ejemplo 9.5.

Una persona obtiene un préstamos de \$3750, acordando pagar capital e intereses al 6 % convertible semestralmente mediante pagos de \$225 cada uno, haciendo el primero en 6 meses. ¿Cuantos pagos deberá hacer?

Ejemplo 9.6.

Se va a construir un fondo de \$5000, mediante depósitos de \$250 cada 3 meses. Si el fondo gana 4 % convertible trimestralmente, hallar el número de depósitos de \$250 que tendrán que hacerse y el importe dle depósito que será necesario hacer 3 meses más tarde.

Ejemplo 9.7.

Un televisor puede ser comprado con \$449.50 al contado o con \$49.50 de enganche y \$27.50 mensuales durante 18 meses.

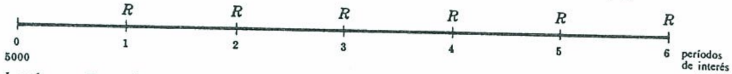
1. ¿Qué tasa *nominal de interés se está cargando*?
2. ¿Qué tasa efectiva de interés se está cargando?

Amortización

Se dice que un documento que causa intereses está amortizado cuando todas las obligaciones contraídas (tanto capital com intereses) son liquidadas mediante una serie de pagos (generalmente iguales), hecho en intervalos de tiempos iguales.

Ejemplo 10.1.

Una deuda de \$5000 con intereses al 5 % convertible semestralmente se va amortizar mediante pagos semestrales iguales R en los próximos 3 años; el primero con vencimiento al término de 6 meses. Hallar el pago.



Los 6 pagos R constituyen una anualidad cuyo valor presente es \$5000. Por tanto

$$R\, a_{\overline{6}|.025} = 5000 \qquad \text{y} \qquad R = 5000\,\frac{1}{a_{\overline{6}|.025}} = \$907{,}75$$

Amortizaremos una deuda A amparada con un documento que causa intereses, mediante una serie de n pagos de R pesos cada uno, como se calculó ya antes. Cada pago R se aplica en primer lugar para el pago del interés vencido en la fecha del pago; la diferencia se utiliza para disminuir la deuda. En consecuencia, la cantidad disponible para disminuir la deuda aumenta en el curso del tiempo.

Amortizaremos una deuda A amparada con un documento que causa intereses, mediante una serie de n pagos de R pesos cada uno, como se calculó ya antes. Cada pago R se aplica en primer lugar para el pago del interés vencido en la fecha del pago; la diferencia se utiliza para disminuir la deuda. En consecuencia, la cantidad disponible para disminuir la deuda aumenta en el curso del tiempo.

Amortizaremos una deuda A amparada con un documento que causa intereses, mediante una serie de n pagos de R pesos cada uno, como se calculó ya antes. Cada pago R se aplica en primer lugar para el pago del interés vencido en la fecha del pago; la diferencia se utiliza para disminuir la deuda. En consecuencia, la cantidad disponible para disminuir la deuda aumenta en el curso del tiempo.

La parte de la deuda no cubierta en una fecha dada se conoce como *saldo insoluto* o *capital insoluto* en la fecha. El capital insoluto al inicio del plazo es la deuda original. El capital insoluto justamente después de se ha efectuado un pago es el valor presente de todos los pagos que aún faltan por hacerse.

La parte de la deuda no cubierta en una fecha dada se conoce como *saldo insoluto* o *capital insoluto* en la fecha. El capital insoluto al inicio del plazo es la deuda original. El capital insoluto justamente después de se ha efectuado un pago es el valor presente de todos los pagos que aún faltan por hacerse.

La parte de la deuda no cubierta en una fecha dada se conoce como *saldo insoluto* o *capital insoluto* en la fecha. El capital insoluto al inicio del plazo es la deuda original. El capital insoluto justamente después de se ha efectuado un pago es el valor presente de todos los pagos que aún faltan por hacerse.

Para efectos contables es conveniente preparar una tabla que muestre la distribución de cada pago de la amortización respecto a los intereses que cubre y la reducción de la deuda.

(Pseudo)código para crear una tabla de amortización

A_k denotará el capital insoluto al principio del $k-$ésimo periodo; IV_k, el interés vencido al final del $k-$ésimo periodo; y CP_k el capital pagado al final del $k-$ésimo periodo.

1. Inicializamos nuestras variables:

$$A_1 = A, IV_1 = A * i, CP_1 = R - A * i$$

y los anexamos al primer renglón de la tabla.

2. Para el siguiente renglón, calculamos

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k - CP_k; \\ IV_{k+1} = A_{k+1} * i; \\ CP_{k+1} = R - IV_k; \end{cases}$$

anexamos esto al siguiente renglón y repetimos el procedimiento hasta completar el $n-$ésimo renglón.

3. Finalmente, anexamos un renglón con los totales de intereses vencidos, y los capitales pagados al final de cada periodo.

A continuación, se presenta la tabla del ejercicio 10.1:

Periodo	Capital insoluto	Interés vencido	Pago	Capital pagado
1	5000.0	125.0	907.75	782.75
2	4217.25	105.43	907.75	802.32
3	3414.93	85.37	907.75	822.38
4	2592.55	64.81	907.75	842.94
5	1749.62	43.74	907.75	864.01
6	885.61	22.14	907.75	885.61
Totales		424.35	4538.75	4114.4

Ejemplo 10.2.

En el ejemplo anterior, hallar el capital insoluto justamente después del 4° pago y comparar con la cifra de la tabla anterior.

Ejemplo 10.3.

Una deuda de \$6,000 con intereses al 6 % convertible mensualmente se va amortizar mediante pagos mensuales iguales R en los próximos 2 años; el primero con vencimiento al término del primer meses. Contruir la tabla de amortización correspondiente.

Cuando se compra un bien mediante una serie de pagos parciales, el *interés del comprador* del bien, en cualquier tiempo, es aquell parte del bien que ha pagado. Al mismo tiempo, el *interés del vendedor* del bien, es aquel que queda por pagarse, esto es, el capital insoluto en la fecha. Claramente vemos queda

$$\begin{aligned}\texttt{interés del comprador} + \texttt{interés del vendedor}\\ = \texttt{precio de venta.}\end{aligned}$$

Cuando se compra un bien mediante una serie de pagos parciales, el *interés del comprador* del bien, en cualquier tiempo, es aquell parte del bien que ha pagado. Al mismo tiempo, el *interés del vendedor* del bien, es aquel que queda por pagarse, esto es, el capital insoluto en la fecha. Claramente vemos queda

$$\begin{aligned}\texttt{interés del comprador} &+ \texttt{interés del vendedor}\\ &= \texttt{precio de venta.}\end{aligned}$$

Ejemplo 10.4.

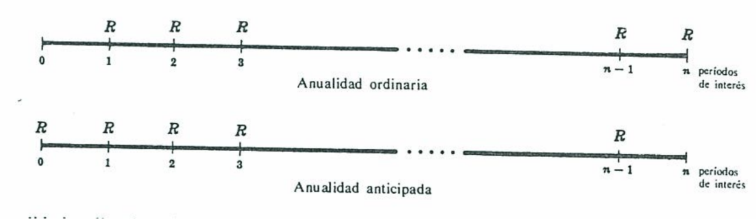
Una persona compra una casa en \$25,000. Paga una cuota inicial de \$10,000 y el saldo lo amortiza con intereses al 6 % convertible mensualmente, mediante pagos iguales al final de cada mes en los ṕroximos 10 años. Construya la tabla de amortización correspondiente. ¿Cuál es el interés justamente después de hace el 50° pago periódico?

Anualidades anticipadas

Una anualidad anticipada es una anualidad cuyo pago periódico vence al principio del intervalo de pago. Por ejemplo, el pago de la renta de una casa.

Anualidades anticipadas

Una anualidad anticipada es una anualidad cuyo pago periódico vence al principio del intervalo de pago. Por ejemplo, el pago de la renta de una casa.


R R R R R
0 1 2 3 n − 1 n periodos de interés
Anualidad ordinaria
R R R R R
0 1 2 3 n − 1 n periodos de interés
Anualidad anticipada

Ejemplo 11.1.

La renta mensual de un edificio es \$400 pagaderos por adelantado, esto es, al principio de cada mes. ¿Cuál es la renta equivalente X pagada por adelantado, al 6 % convertible mensualmente?


400
400
400
400
0
1
2
11
12
X
periodos
de interés

Ejemplo 11.2.

Los días 15 de cada mes, una persona invierte \$100 en un fondo que paga el 3 % convertible mensualmente. ¿Cuánto habrá en el fondo justamente antes del 10° depósito?


100
100
100
100
0
1
2
9
10 periodos.
X de interés

Anualidades diferidas

Una anualidad diferida es aquella cuyo primer pago se hace algún tiempo después del término del primer periodo de interés.

Ejemplo 11.3.

Un puente recién construido no necesitará reparación hasta el término de 5 años, cuando requerirá \$300 para reparaciones.

Se estima que de ahí en adelante, se necesitarán \$300 al final de cada año en los próximos 20 años.

Hallar el valor presente X del mantenimiento del puente, sobre la base del $3\,\%$.

Ejemplo 11.3.

Un puente recién construido no necesitará reparación hasta el término de 5 años, cuando requerirá \$300 para reparaciones.

Se estima que de ahí en adelante, se necesitarán \$300 al final de cada año en los próximos 20 años.

Hallar el valor presente X del mantenimiento del puente, sobre la base del $3\,\%$.

Ejemplo 11.3.

Un puente recién construido no necesitará reparación hasta el término de 5 años, cuando requerirá \$300 para reparaciones.
Se estima que de ahí en adelante, se necesitarán \$300 al final de cada año en los próximos 20 años.
Hallar el valor presente X del mantenimiento del puente, sobre la base del 3 %.

Ejemplo 11.3.

Un puente recién construido no necesitará reparación hasta el término de 5 años, cuando requerirá \$300 para reparaciones.
Se estima que de ahí en adelante, se necesitarán \$300 al final de cada año en los próximos 20 años.
Hallar el valor presente X del mantenimiento del puente, sobre la base del 3 %.


300
300
300
0
1
2
3
4
5
6
25 períodos de interés
X
A

Perpetuidad

Una perpetuidad es una anualidad cuyo pago se inicia en un fecha fija y continua para siempre. No se puede hablar del monto de una perpetuidad; pero sí de un valor presente A_∞ definido:

$$A_\infty = \frac{R}{i}.$$

Perpetuidad

Una perpetuidad es una anualidad cuyo pago se inicia en un fecha fija y continua para siempre. No se puede hablar del monto de una perpetuidad; pero sí de un valor presente A_∞ definido:

$$A_\infty = \frac{R}{i}.$$

Ejemplo 11.4.

Una compañia espera pagar \$2.50 cada seis meses, indefinidamente, como dividendo sobre sus acciones. Suponiendo un rendimiento de 6 % convertible semestralmente, ¿cuánto deberá estar dispuesto a pagar una persona por cada acción?

Ejemplo 11.5.

¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar una persona por cada acción del ejemplo 11.4 si espera una resituabilidad de 5 % convertible trimestralmente?

Ejemplo 11.6.

¿Cuanto debería estar dispuesta a pagar una persona por cada acción del ejemplo 4 si espera una redituabilidad del 5 % efectivo?

Costo capitalizado

El costo capitalizado C de un activo es el costo inicial F más el valor presente de un número ilimitado de costos de remplazo R, esto es, de una perpetuidad de R por intervalo de reemplazo.

12 Introducción

13 Valor Presente Neto
- Numpy

14 Tasa Interna de Retorno
- Tasa interna de retorno

Inversiones

Una *inversión* es un activo destinado a producir rendimientos y plusvalías. Un activo es un recurso económico que a) se puede poseer, y se espera b) proporcionar beneficios económicos en el futuro. Las inversiones pueden ser acciones, bonos, fondos mutuos, cuentas remuneradas, tierra, derivados, bienes raíces, obras de arte, libros de cómics antiguos, joyas - cualquier cosa que un inversor considera que producirá ingresos (por lo general en forma de intereses o rentas) o que ganarán más valor.

Inversiones

Una *inversión* es un activo destinado a producir rendimientos y plusvalías. Un activo es un recurso económico que a) se puede poseer, y se espera b) proporcionar beneficios económicos en el futuro. Las inversiones pueden ser acciones, bonos, fondos mutuos, cuentas remuneradas, tierra, derivados, bienes raíces, obras de arte, libros de cómics antiguos, joyas - cualquier cosa que un inversor considera que producirá ingresos (por lo general en forma de intereses o rentas) o que ganarán más valor.

Inversiones

Una *inversión* es un activo destinado a producir rendimientos y plusvalías. Un activo es un recurso económico que a) se puede poseer, y se espera b) proporcionar beneficios económicos en el futuro. Las inversiones pueden ser acciones, bonos, fondos mutuos, cuentas remuneradas, tierra, derivados, bienes raíces, obras de arte, libros de cómics antiguos, joyas - cualquier cosa que un inversor considera que producirá ingresos (por lo general en forma de intereses o rentas) o que ganarán más valor.

En las finanzas, el capital se refiere al valor nominal de un instrumento de deuda o una cantidad de dinero prestado. Por ejemplo, si usted pide prestado $25,000 del Banco XYZ para la compra de un coche, el saldo de capital es de $25.000. A medida que pasa el tiempo y se pueden realizar pagos en el préstamo, el saldo de capital disminuye.

En las finanzas, el capital se refiere al valor nominal de un instrumento de deuda o una cantidad de dinero prestado. Por ejemplo, si usted pide prestado $25,000 del Banco XYZ para la compra de un coche, el saldo de capital es de $25.000. A medida que pasa el tiempo y se pueden realizar pagos en el préstamo, el saldo de capital disminuye.

Para los bonos, el capital se refiere a valor nominal del bono o el valor nominal. Por lo tanto, un bono con un valor nominal de $ 10,000 representa un préstamo de $ 10,000 para el emisor (es decir, $ 10.000 de capital). Por lo general es igual a la cantidad que el tenedor de bonos recibe en la fecha de vencimiento del bono.

Para los bonos, el capital se refiere a valor nominal del bono o el valor nominal. Por lo tanto, un bono con un valor nominal de \$ 10,000 representa un préstamo de \$ 10,000 para el emisor (es decir, \$ 10.000 de capital). Por lo general es igual a la cantidad que el tenedor de bonos recibe en la fecha de vencimiento del bono.

Los intereses sobre cualquier préstamo, bono o no, por lo general se acumula en el saldo de capital pendiente. Es decir, cuanto menor es el capital pendiente, el interés total menor que el prestamista gana.

Observación 12.1.

Un bono, también conocido como un valor de renta fija, es un instrumento de deuda creada con el propósito de obtener capital. Son esencialmente contratos de préstamo entre el emisor del bono y un inversor, en la que está obligado el emisor del bono a pagar una cantidad específica de dinero en fechas futuras especificadas.

Los intereses sobre cualquier préstamo, bono o no, por lo general se acumula en el saldo de capital pendiente. Es decir, cuanto menor es el capital pendiente, el interés total menor que el prestamista gana.

Observación 12.1.

Un bono, también conocido como un valor de renta fija, es un instrumento de deuda creada con el propósito de obtener capital. Son esencialmente contratos de préstamo entre el emisor del bono y un inversor, en la que está obligado el emisor del bono a pagar una cantidad específica de dinero en fechas futuras especificadas.

La seguridad del capital es de preocupación en cualquier inversión, aunque algunos inversores son más tolerantes al riesgo que otros y por lo tanto están más dispuestos a perder parte de su empresario a cambio de la oportunidad de generar un mayor beneficio. La capacidad del inversor para tolerar el riesgo y la rentabilidad adicional asociado con cantidades crecientes de riesgo son los dos factores principales que distinguen tipos de inversión entre sí y ayudan a determinar las inversiones adecuadas para un inversor determinado.

La seguridad del capital es de preocupación en cualquier inversión, aunque algunos inversores son más tolerantes al riesgo que otros y por lo tanto están más dispuestos a perder parte de su empresario a cambio de la oportunidad de generar un mayor beneficio. La capacidad del inversor para tolerar el riesgo y la rentabilidad adicional asociado con cantidades crecientes de riesgo son los dos factores principales que distinguen tipos de inversión entre sí y ayudan a determinar las inversiones adecuadas para un inversor determinado.

Flujo de caja

El flujo de caja es simplemente el efectivo que se espera sean generados por una inversión, activo o negocio.

Ejemplo 12.1.

Como inversor, usted compra una acción que paga dividendos; usted compra la acción a $\$10$ y la compañía le paga un dividendo de \$0.50 cada uno año. $\$0.50$ es el flujo de efectivo para usted. Usted ha valorado la acción en $\$10$ basado en el flujo de caja anual flujos que recibe cada año. Si el dividendo se reduce a $\$0.25$, la acción tendrá un valor de menos a usted, y si el dividendo se incrementa a $\$0.75$, la acción valdrá más.

A nivel de empresa, supongamos que un negocio tuvo un buen año y fue capaz de aumentar la cantidad de flujo de caja que generó; se hizo más de lo que pagó. La empresa puede mantener el dinero en efectivo, ya sea para reinvertir en las futuras perspectivas de negocio, o se puede distribuir el dinero en efectivo para sus inversores. Cualquier persona que quiera poner un precio a la empresa en su conjunto va a ver el flujo de caja que genera y asignar un valor en función de esos flujos de efectivo.

A nivel de empresa, supongamos que un negocio tuvo un buen año y fue capaz de aumentar la cantidad de flujo de caja que generó; se hizo más de lo que pagó. La empresa puede mantener el dinero en efectivo, ya sea para reinvertir en las futuras perspectivas de negocio, o se puede distribuir el dinero en efectivo para sus inversores.
Cualquier persona que quiera poner un precio a la empresa en su conjunto va a ver el flujo de caja que genera y asignar un valor en función de esos flujos de efectivo.

A nivel de empresa, supongamos que un negocio tuvo un buen año y fue capaz de aumentar la cantidad de flujo de caja que generó; se hizo más de lo que pagó. La empresa puede mantener el dinero en efectivo, ya sea para reinvertir en las futuras perspectivas de negocio, o se puede distribuir el dinero en efectivo para sus inversores. Cualquier persona que quiera poner un precio a la empresa en su conjunto va a ver el flujo de caja que genera y asignar un valor en función de esos flujos de efectivo.

En E.E.U.U., por ejemplo, se requiere un estado de flujo de efectivo para ser presentado ante la SEC por cada compañía que cotiza en bolsa. Mediante el examen de ella, un inversor puede realizar un seguimiento de las fuentes de efectivo y los usos de efectivo durante todo el período de tiempo cubierto. La "U.S. Securities and Exchange Commission" de los Estados Unidos (comúnmente conocida como la SEC) es una agencia del gobierno de Estados Unidos que tiene la responsabilidad principal de hacer cumplir las leyes federales de los valores y regular la industria de los valores, los mercados financieros de la nación, así como las bolsas de valores, de opciones y otros mercados de valores electrónicos.

En E.E.U.U., por ejemplo, se requiere un estado de flujo de efectivo para ser presentado ante la SEC por cada compañía que cotiza en bolsa. Mediante el examen de ella, un inversor puede realizar un seguimiento de las fuentes de efectivo y los usos de efectivo durante todo el período de tiempo cubierto. La "U.S. Securities and Exchange Commission" de los Estados Unidos (comúnmente conocida como la SEC) es una agencia del gobierno de Estados Unidos que tiene la responsabilidad principal de hacer cumplir las leyes federales de los valores y regular la industria de los valores, los mercados financieros de la nación, así como las bolsas de valores, de opciones y otros mercados de valores electrónicos.

Una empresa pública es una empresa con valores (acciones y obligaciones) poseídos y comercializados por el público en general a través de los mercados de capitales públicos. Las acciones de una compañía pública que se negocian de manera abierta y ampliamente distribuidos. De acuerdo con la Comisión de Valores de EE.UU. (SEC), cualquier empresa con más de $10 millones en activos y 500 accionistas registrados se requiere para registrarse ante la SEC, y está sujeto a sus normas y reglamentos de informes. Por ejemplo, puede consultar las 2000 Compañias Públicas más Grandes del Mundo en Forbes. En primer lugar está Citigroup.

Una empresa pública es una empresa con valores (acciones y obligaciones) poseídos y comercializados por el público en general a través de los mercados de capitales públicos. Las acciones de una compañía pública que se negocian de manera abierta y ampliamente distribuidos. De acuerdo con la Comisión de Valores de EE.UU. (SEC), cualquier empresa con más de $10 millones en activos y 500 accionistas registrados se requiere para registrarse ante la SEC, y está sujeto a sus normas y reglamentos de informes. Por ejemplo, puede consultar las 2000 Compañias Públicas más Grandes del Mundo en Forbes. En primer lugar está Citigroup.

Una empresa pública es una empresa con valores (acciones y obligaciones) poseídos y comercializados por el público en general a través de los mercados de capitales públicos. Las acciones de una compañía pública que se negocian de manera abierta y ampliamente distribuidos. De acuerdo con la Comisión de Valores de EE.UU. (SEC), cualquier empresa con más de $\$10$ millones en activos y 500 accionistas registrados se requiere para registrarse ante la SEC, y está sujeto a sus normas y reglamentos de informes. Por ejemplo, puede consultar las 2000 Compañias Públicas más Grandes del Mundo en Forbes. En primer lugar está Citigroup.

Una empresa pública es una empresa con valores (acciones y obligaciones) poseídos y comercializados por el público en general a través de los mercados de capitales públicos. Las acciones de una compañía pública que se negocian de manera abierta y ampliamente distribuidos. De acuerdo con la Comisión de Valores de EE.UU. (SEC), cualquier empresa con más de $\$10$ millones en activos y 500 accionistas registrados se requiere para registrarse ante la SEC, y está sujeto a sus normas y reglamentos de informes. Por ejemplo, puede consultar las 2000 Compañias Públicas más Grandes del Mundo en Forbes. En primer lugar está Citigroup.

Una empresa pública es capaz de levantar grandes cantidades de capital en los mercados de capitales públicos, la negociación de acciones de propiedad, así como el control de la empresa. Al mismo tiempo, las empresas públicas están sujetas a mayores niveles de informes costosos, reglamentos, y el escrutinio público. Por ejemplo, las empresas que cotizan en bolsa deben publicar informes anuales, como el Formulario 10-K, presentado ante la SEC, y revelar información detallada sobre sus finanzas y actividades de negocio, incluyendo información de propiedad que pueden ayudar a los competidores. Además, los cambios dentro de la empresa, tales como la estructura de capital de la empresa, tienen que ser aprobados por los accionistas.

Una empresa pública es capaz de levantar grandes cantidades de capital en los mercados de capitales públicos, la negociación de acciones de propiedad, así como el control de la empresa. Al mismo tiempo, las empresas públicas están sujetas a mayores niveles de informes costosos, reglamentos, y el escrutinio público. Por ejemplo, las empresas que cotizan en bolsa deben publicar informes anuales, como el Formulario 10-K, presentado ante la SEC, y revelar información detallada sobre sus finanzas y actividades de negocio, incluyendo información de propiedad que pueden ayudar a los competidores. Además, los cambios dentro de la empresa, tales como la estructura de capital de la empresa, tienen que ser aprobados por los accionistas.

Una empresa pública es capaz de levantar grandes cantidades de capital en los mercados de capitales públicos, la negociación de acciones de propiedad, así como el control de la empresa. Al mismo tiempo, las empresas públicas están sujetas a mayores niveles de informes costosos, reglamentos, y el escrutinio público. Por ejemplo, las empresas que cotizan en bolsa deben publicar informes anuales, como el Formulario 10-K, presentado ante la SEC, y revelar información detallada sobre sus finanzas y actividades de negocio, incluyendo información de propiedad que pueden ayudar a los competidores. Además, los cambios dentro de la empresa, tales como la estructura de capital de la empresa, tienen que ser aprobados por los accionistas.

Una empresa pública es capaz de levantar grandes cantidades de capital en los mercados de capitales públicos, la negociación de acciones de propiedad, así como el control de la empresa. Al mismo tiempo, las empresas públicas están sujetas a mayores niveles de informes costosos, reglamentos, y el escrutinio público. Por ejemplo, las empresas que cotizan en bolsa deben publicar informes anuales, como el Formulario 10-K, presentado ante la SEC, y revelar información detallada sobre sus finanzas y actividades de negocio, incluyendo información de propiedad que pueden ayudar a los competidores. Además, los cambios dentro de la empresa, tales como la estructura de capital de la empresa, tienen que ser aprobados por los accionistas.

Observación 12.2.

El flujo de caja debe ser la prioridad #1 para todos los inversores. Cualquier activo con el tiempo debería generar dinero en efectivo para pagar el capital que el inversor ha invertido.

El valor de cualquier activo se puede determinar en tres etapas:

1. estimar los flujos de efectivo futuros del activo va a generar para usted;
2. elija una tasa de descuento adecuado para tener en cuenta el riesgo que está asumiendo mediante la inversión en el activo;
3. calcular el valor presente de los flujos de efectivo d[illegible] descontando a su valor presente usando [illegible]

El valor de cualquier activo se puede determinar en tres etapas:

1. estimar los flujos de efectivo futuros del activo va a generar para usted;
2. elija una tasa de descuento adecuado para tener en cuenta el riesgo que está asumiendo mediante la inversión en el activo;
3. calcular el valor presente de los flujos de efectivo de #1 descontando a su valor presente usando #2

El valor de cualquier activo se puede determinar en tres etapas:

1. estimar los flujos de efectivo futuros del activo va a generar para usted;
2. elija una tasa de descuento adecuado para tener en cuenta el riesgo que está asumiendo mediante la inversión en el activo;
3. calcular el valor presente de los flujos de efectivo de #1 descontando a su valor presente usando #2.

El valor de cualquier activo se puede determinar en tres etapas:

1. estimar los flujos de efectivo futuros del activo va a generar para usted;
2. elija una tasa de descuento adecuado para tener en cuenta el riesgo que está asumiendo mediante la inversión en el activo;
3. calcular el valor presente de los flujos de efectivo de #1 descontando a su valor presente usando #2.

El valor de cualquier activo se puede determinar en tres etapas:

1. estimar los flujos de efectivo futuros del activo va a generar para usted;
2. elija una tasa de descuento adecuado para tener en cuenta el riesgo que está asumiendo mediante la inversión en el activo;
3. calcular el valor presente de los flujos de efectivo de $\#1$ descontando a su valor presente usando $\#2$.

Es importante tener en cuenta que el tener flujo de caja negativo temporal no siempre es algo malo. Si una empresa está gastando más dinero de lo que gana, ya que es la construcción de una planta de fabricación más eficiente, por ejemplo, la inversión debe pagar más tarde, cuando la planta genere productos que son convertidos en efectivo. Por otro lado, si una empresa tiene un flujo de caja negativo porque se pagó en exceso por las adquisiciones o porque hizo otras inversiones pobres, los beneficios a largo plazo puede que nunca se materializen.

Es importante tener en cuenta que el tener flujo de caja negativo temporal no siempre es algo malo.Si una empresa está gastando más dinero de lo que gana, ya que es la construcción de una planta de fabricación más eficiente, por ejemplo, la inversión debe pagar más tarde, cuando la planta genere productos que son convertidos en efectivo. Por otro lado, si una empresa tiene un flujo de caja negativo porque se pagó en exceso por las adquisiciones o porque hizo otras inversiones pobres, los beneficios a largo plazo puede que nunca se materializen.

Es importante tener en cuenta que el tener flujo de caja negativo temporal no siempre es algo malo.Si una empresa está gastando más dinero de lo que gana, ya que es la construcción de una planta de fabricación más eficiente, por ejemplo, la inversión debe pagar más tarde, cuando la planta genere productos que son convertidos en efectivo. Por otro lado, si una empresa tiene un flujo de caja negativo porque se pagó en exceso por las adquisiciones o porque hizo otras inversiones pobres, los beneficios a largo plazo puede que nunca se materializen.

Valor Presente

El Valor Actual o Presente describe la cantidad que una suma futura de dinero vale hoy. La fórmula para el valor presente es:

$$PV = CF/(1+r)^n \tag{PV}$$

donde CF es el flujo de efectivo (*cashflow*) en un periodo futuro;r es la *tasa periódica de retorno* o interés (también llamda *tasa de descuento* o *tasa requerida de retorno.*);y n es el número de periódos.

Valor Presente

El Valor Actual o Presente describe la cantidad que una suma futura de dinero vale hoy. La fórmula para el valor presente es:

$$PV = CF/(1+r)^n \tag{PV}$$

donde CF es el flujo de efectivo (*cashflow*) en un periodo futuro; r es la *tasa periódica de retorno* o interés (también llamda *tasa de descuento* o *tasa requerida de retorno.*);y n es el número de periódos.

Valor Presente

El Valor Actual o Presente describe la cantidad que una suma futura de dinero vale hoy. La fórmula para el valor presente es:

$$PV = CF/(1+r)^n \tag{PV}$$

donde CF es el flujo de efectivo (*cashflow*) en un periodo futuro;r es la *tasa periódica de retorno* o interés (también llamda *tasa de descuento* o *tasa requerida de retorno.*);y n es el número de periódos.

Valor Presente

El Valor Actual o Presente describe la cantidad que una suma futura de dinero vale hoy. La fórmula para el valor presente es:

$$PV = CF/(1+r)^n \tag{PV}$$

donde CF es el flujo de efectivo (*cashflow*) en un periodo futuro;r es la *tasa periódica de retorno* o interés (también llamda *tasa de descuento* o *tasa requerida de retorno.*);y n es el número de periódos.

Ejemplo 13.1.

Suponga que le gustaría poner dinero en una cuenta hoy mismo para asegurarse de que su hijo tiene suficiente dinero en 10 años para comprar un coche. Si desea dar a su hijo \$10.000 en 10 años, y usted sabe que puede llegar al 5 % de interés por año a partir de una cuenta de ahorro durante ese tiempo, ¿cuánto debe poner en la cuenta ahora? La fórmula del valor actual nos dice:

$$PV = \$10,000(1+0.05)^{-10} = \$6,139.13.$$

Por lo tanto, \$6,139.13 tendrá un valor de \$10.000 en 10 años si se puede ganar un 5 % cada año. En otras palabras, el valor actual de \$10.000 en este escenario es de \$6,139.13.

Ejemplo 13.1.

Suponga que le gustaría poner dinero en una cuenta hoy mismo para asegurarse de que su hijo tiene suficiente dinero en 10 años para comprar un coche. Si desea dar a su hijo \$10.000 en 10 años, y usted sabe que puede llegar al 5 % de interés por año a partir de una cuenta de ahorro durante ese tiempo, ¿cuánto debe poner en la cuenta ahora? La fórmula del valor actual nos dice:

$$PV = \$10,000(1+0.05)^{-10} = \$6,139.13.$$

Por lo tanto, \$6,139.13 tendrá un valor de \$10.000 en 10 años si se puede ganar un 5 % cada año. En otras palabras, el valor actual de \$10.000 en este escenario es de \$6,139.13.

Ejemplo 13.1.

Suponga que le gustaría poner dinero en una cuenta hoy mismo para asegurarse de que su hijo tiene suficiente dinero en 10 años para comprar un coche. Si desea dar a su hijo \$10.000 en 10 años, y usted sabe que puede llegar al 5 % de interés por año a partir de una cuenta de ahorro durante ese tiempo, ¿cuánto debe poner en la cuenta ahora? La fórmula del valor actual nos dice:

$$PV = \$10,000(1+0.05)^{-10} = \$6,139.13.$$

Por lo tanto, \$6,139.13 tendrá un valor de \$10.000 en 10 años si se puede ganar un 5 % cada año. En otras palabras, el valor actual de \$10.000 en este escenario es de \$6,139.13.

Ejemplo 13.1.

Suponga que le gustaría poner dinero en una cuenta hoy mismo para asegurarse de que su hijo tiene suficiente dinero en 10 años para comprar un coche. Si desea dar a su hijo \$10.000 en 10 años, y usted sabe que puede llegar al 5 % de interés por año a partir de una cuenta de ahorro durante ese tiempo, ¿cuánto debe poner en la cuenta ahora? La fórmula del valor actual nos dice:

$$PV = \$10,000(1+0.05)^{-10} = \$6,139.13.$$

Por lo tanto, \$6,139.13 tendrá un valor de \$10.000 en 10 años si se puede ganar un 5 % cada año. En otras palabras, el valor actual de \$10.000 en este escenario es de \$6,139.13.

Observación 13.1.

Es importante señalar que los tres componentes más influyentes del valor actual son el tiempo, la tasa de retorno esperada, y el tamaño de los flujos de fondos. Para tener en cuenta la inflación en el cálculo, los inversores deben utilizar la tasa de interés real

`tasa de interés nominal - tasa de inflación`

.Si se les da suficiente tiempo, los pequeños cambios en estos componentes pueden tener efectos significativos.

Observación 13.1.

Es importante señalar que los tres componentes más influyentes del valor actual son el tiempo, la tasa de retorno esperada, y el tamaño de los flujos de fondos. Para tener en cuenta la inflación en el cálculo, los inversores deben utilizar la tasa de interés real

`tasa de interés nominal - tasa de inflación`

.Si se les da suficiente tiempo, los pequeños cambios en estos componentes pueden tener efectos significativos.

Observación 13.1.

Es importante señalar que los tres componentes más influyentes del valor actual son el tiempo, la tasa de retorno esperada, y el tamaño de los flujos de fondos.Para tener en cuenta la inflación en el cálculo, los inversores deben utilizar la tasa de interés real

```
tasa de interés nominal - tasa de inflación
```

.Si se les da suficiente tiempo, los pequeños cambios en estos componentes pueden tener efectos significativos.

Observación 13.1.

Es importante señalar que los tres componentes más influyentes del valor actual son el tiempo, la tasa de retorno esperada, y el tamaño de los flujos de fondos.Para tener en cuenta la inflación en el cálculo, los inversores deben utilizar la tasa de interés real

`tasa de interés nominal - tasa de inflación`

.Si se les da suficiente tiempo, los pequeños cambios en estos componentes pueden tener efectos significativos.

El concepto de valor presente es uno de los más fundamentales y omnipresente en el mundo de las finanzas. Es la base para la acción de fijación de precios, fijación de precios de bonos, modelos financieros, banca, seguros, valoración de fondos de pensiones, e incluso los pagos de lotería; representa el hecho de que el dinero que recibimos hoy en día se puede invertir hoy para obtener un rendimiento. En otras palabras, el valor actual representa el valor temporal del dinero.

El concepto de valor presente es uno de los más fundamentales y omnipresente en el mundo de las finanzas.Es la base para la acción de fijación de precios, fijación de precios de bonos, modelos financieros, banca, seguros, valoración de fondos de pensiones, e incluso los pagos de lotería;representa el hecho de que el dinero que recibimos hoy en día se puede invertir hoy para obtener un rendimiento.En otras palabras, el valor actual representa el valor temporal del dinero.

El concepto de valor presente es uno de los más fundamentales y omnipresente en el mundo de las finanzas.Es la base para la acción de fijación de precios, fijación de precios de bonos, modelos financieros, banca, seguros, valoración de fondos de pensiones, e incluso los pagos de lotería;representa el hecho de que el dinero que recibimos hoy en día se puede invertir hoy para obtener un rendimiento.En otras palabras, el valor actual representa el valor temporal del dinero.

El concepto de valor presente es uno de los más fundamentales y omnipresente en el mundo de las finanzas.Es la base para la acción de fijación de precios, fijación de precios de bonos, modelos financieros, banca, seguros, valoración de fondos de pensiones, e incluso los pagos de lotería;representa el hecho de que el dinero que recibimos hoy en día se puede invertir hoy para obtener un rendimiento.En otras palabras, el valor actual representa el valor temporal del dinero.

En el mundo de valores, calcular el valor presente puede ser un proceso complejo e inexacto, que incorpora supuestos relativos a las tasas de corto y largo plazo de crecimiento, los gastos de capital, requisitos de vuelta, y muchos otros factores. Naturalmente, estas variables son imposibles de predecir con una precisión perfecta. En cualquier caso, el valor actual proporciona una estimación de lo que deberíamos gastar hoy (por ejemplo, qué precio hay que pagar) para tener una inversión que valga una cierta cantidad de dinero en un punto específico en el futuro;esta es la premisa básica de las matemáticas detrás de la mayoría de los modelos de cotización de bonos e inventarios.

En el mundo de valores, calcular el valor presente puede ser un proceso complejo e inexacto, que incorpora supuestos relativos a las tasas de corto y largo plazo de crecimiento, los gastos de capital, requisitos de vuelta, y muchos otros factores.Naturalmente, estas variables son imposibles de predecir con una precisión perfecta. En cualquier caso, el valor actual proporciona una estimación de lo que deberíamos gastar hoy (por ejemplo, qué precio hay que pagar) para tener una inversión que valga una cierta cantidad de dinero en un punto específico en el futuro;esta es la premisa básica de las matemáticas detrás de la mayoría de los modelos de cotización de bonos e inventarios.

En el mundo de valores, calcular el valor presente puede ser un proceso complejo e inexacto, que incorpora supuestos relativos a las tasas de corto y largo plazo de crecimiento, los gastos de capital, requisitos de vuelta, y muchos otros factores.Naturalmente, estas variables son imposibles de predecir con una precisión perfecta. En cualquier caso, el valor actual proporciona una estimación de lo que deberíamos gastar hoy (por ejemplo, qué precio hay que pagar) para tener una inversión que valga una cierta cantidad de dinero en un punto específico en el futuro;esta es la premisa básica de las matemáticas detrás de la mayoría de los modelos de cotización de bonos e inventarios.

En el mundo de valores, calcular el valor presente puede ser un proceso complejo e inexacto, que incorpora supuestos relativos a las tasas de corto y largo plazo de crecimiento, los gastos de capital, requisitos de vuelta, y muchos otros factores.Naturalmente, estas variables son imposibles de predecir con una precisión perfecta. En cualquier caso, el valor actual proporciona una estimación de lo que deberíamos gastar hoy (por ejemplo, qué precio hay que pagar) para tener una inversión que valga una cierta cantidad de dinero en un punto específico en el futuro;esta es la premisa básica de las matemáticas detrás de la mayoría de los modelos de cotización de bonos e inventarios.

El valor presente es uno de los conceptos más importantes en las finanzas. Afortunadamente, es fácil de calcular una vez que se saben algunos *"trucos", i.e., Python, SageMath, R, etc...*

Valor Presente Neto

El valor actual neto (*NPV,Net present value*) es el valor presente de los flujos de caja esperados de una inversión menos los costes de adquisición de la inversión.

La fórmula para NPV es:

$$\begin{aligned} NPV &= (\texttt{flujos de efectivo de la inversión}) \\ &- (\texttt{salidas de efectivo o costes de inversión}) \\ &= PV(\texttt{beneficios}) - PV(\texttt{costos}) \end{aligned} \tag{NVP}$$

NVP se utiliza para analizar una decisión de inversión y dar a la gestión de la empresa de una manera clara de saber si la inversión va a agregar valor a la empresa. Normalmente, si una inversión tiene un valor presente neto positivo, que añadirá valor a la empresa y beneficiar a los accionistas de la compañía.

NVP se utiliza para analizar una decisión de inversión y dar a la gestión de la empresa de una manera clara de saber si la inversión va a agregar valor a la empresa. Normalmente, si una inversión tiene un valor presente neto positivo, que añadirá valor a la empresa y beneficiar a los accionistas de la compañía.

Los cálculos del valor actual neto se pueden utilizar ya sea para adquisiciones (como se muestra en el ejemplo anterior) o proyectos futuros de capital. Por ejemplo, si una empresa decide abrir una nueva línea de productos, que pueden utilizar NVP para averiguar si los futuros flujos de caja proyectados cubren los costos futuros de poner en marcha el proyecto. Si el proyecto tiene un NVP positivo, que añade valor a la empresa y por lo tanto debe ser considerado.

Los cálculos del valor actual neto se pueden utilizar ya sea para adquisiciones (como se muestra en el ejemplo anterior) o proyectos futuros de capital. Por ejemplo, si una empresa decide abrir una nueva línea de productos, que pueden utilizar NVP para averiguar si los futuros flujos de caja proyectados cubren los costos futuros de poner en marcha el proyecto. Si el proyecto tiene un NVP positivo, que añade valor a la empresa y por lo tanto debe ser considerado.

Los cálculos del valor actual neto se pueden utilizar ya sea para adquisiciones (como se muestra en el ejemplo anterior) o proyectos futuros de capital. Por ejemplo, si una empresa decide abrir una nueva línea de productos, que pueden utilizar NVP para averiguar si los futuros flujos de caja proyectados cubren los costos futuros de poner en marcha el proyecto. Si el proyecto tiene un NVP positivo, que añade valor a la empresa y por lo tanto debe ser considerado.

Ejemplo 13.2.

Supongamos que tenemos un proyecto de 5 años con una inversión inicial de \$ 100 millones. Los futuros flujos de efectivo al final de cada año durante los próximos cinco años son \$20m, \$40m, \$50m, \$20m, y \$ 10m, respectivamente. Si la tasa de descuento para esos tipos de inversiones es del 5 %, ¿debemos tomar el proyecto?

En primer lugar, tenemos que calcular el NVP de nuestro proyecto. En segundo lugar, tenemos que aplicar la siguiente regla de decisión (la regla del NVP):

$$\begin{cases} \texttt{aceptado} & NPV(\texttt{Proyecto}) > 0 \\ \texttt{rechazado} & NPV(\texttt{Proyecto}) < 0 \end{cases} \tag{13.1}$$

Podemos realizar el cálculo directamente en `SageMath`

```
>>>-100 + 20/(1+0.05)+40/(1+0.05)**2 +50/(1+0.05)**3+20/(1+0.05)**4+10/
(1+0.05)**5
22.80998927303707
```

Podemos simplificar un poco la instrucción:

```
>>>r=0.05
>>>-100 + 20/(1+r)+40/(1+r)**2 +50/(1+r)**3+20/(1+r)**4+10/(1+r)**5
22.80998927303707
```

Mejor aún, podemos "encapsular" el proceso en una función:

```
def npv_f(rate, cashflows):
   total = 0.0
   for n, cashflows in enumerate(cashflows):
       total = total + cashflows / (1+ rate)**n
   return total
```

La podemos usar de la siguiente manera:

```
r=0.05
cashflows=[-100,20,40,50,20,10]
npv_f(r, cashflows)
```

```
22.8099892730371
```

`Numpy`

Aunque podemos definir nuestras propias funciones, una de las ventajas de usar `SageMath` es que está basado en *Python*, un lenguaje de programación que *"tiene baterías incluídas";* esto quiere decir que ya tiene muchos paquetes de funciones incluidos, en particular, para finanzas.

El paquete que más nos interesará es `NumPy`, que como su nombre sugiere, está construído para ejecutar métodos númericos a gran velocidad, pero facilmente implementables.

En particular, NPV está ya implementado en Numpy; lo podemos ocupar de la siguiente manera:

```
import numpy as np #importamos todo NumPy con el alias "n
r=0.05 #ingresamos la tasa de retorno anual
cashflows=[-100,20,40,50,20,10] #ingresamos los flujos de
np.npv(r, cashflows) #llamamos a la función NVP implement
```

```
22.809989273037068
```

Podemos generar una gran cantidad de ejemplos con datos aleatorios:

```
import numpy as np
cashflows = np.random.randint(100, size=5) #generamos una
cashflows = np.insert(cashflows,0, -100) #insertamos el n
print "Flujos de caja : ", cashflows
print "Valor Presente Neto = ", np.npv(0.03, cashflows) #
```

```
Flujos de caja : [-100 24 53 27 97 16]
Valor Presente Neto = 97.9523630584
```

Tasa de retorno

Una tasa de retorno es una medida de la utilidad como un porcentaje de la inversión.

Digamos que una persona abre un puesto de limonada; se invierte \$500 en la empresa, y el puesto de limonada hace alrededor de \$10 por día, o alrededor de \$3,000 al año (suponiendo que se toma algunos días de descanso). En su forma más simple, la tasa de rendimiento en un año de John Doe es simplemente los beneficios como porcentaje de la inversión, o

$$\$3.000/\$500 = 600\,\%$$

.

Digamos que una persona abre un puesto de limonada; se invierte \$500 en la empresa, y el puesto de limonada hace alrededor de \$10 por día, o alrededor de \$3,000 al año (suponiendo que se toma algunos días de descanso). En su forma más simple, la tasa de rendimiento en un año de John Doe es simplemente los beneficios como porcentaje de la inversión, o

$$\$3.000/\$500 = 600\,\%$$

.

Hay una relación fundamental que debe tener en cuenta al pensar en las tasas de rendimiento: entre más arriesgada la empresa, mayor es la tasa de retorno esperada. Por ejemplo, la inversión en un restaurante es mucho más riesgosa que invertir en Bonos del Tesoro; una está respaldado por el gobierno de E.E.U.U; la otra está "respaldado por el sofá de tu primo". De acuerdo con ello, el riesgo de perder su dinero es mucho mayor en el escenario de restaurante, y para inducir a realizar la inversión, los rendimientos esperados tienen que ser mucho más alto que el 1 % que la letra del Tesoro pagaría. A la inversa, entre más segura la inversión, menor es la tasa de rendimiento esperada deber ser.

Hay una relación fundamental que debe tener en cuenta al pensar en las tasas de rendimiento: entre más arriesgada la empresa, mayor es la tasa de retorno esperada. Por ejemplo, la inversión en un restaurante es mucho más riesgosa que invertir en Bonos del Tesoro; una está respaldado por el gobierno de E.E.U.U; la otra está "respaldado por el sofá de tu primo". De acuerdo con ello, el riesgo de perder su dinero es mucho mayor en el escenario de restaurante, y para inducir a realizar la inversión, los rendimientos esperados tienen que ser mucho más alto que el 1 % que la letra del Tesoro pagaría. A la inversa, entre más segura la inversión, menor es la tasa de rendimiento esperada deber ser.

Hay una relación fundamental que debe tener en cuenta al pensar en las tasas de rendimiento: entre más arriesgada la empresa, mayor es la tasa de retorno esperada. Por ejemplo, la inversión en un restaurante es mucho más riesgosa que invertir en Bonos del Tesoro; una está respaldado por el gobierno de E.E.U.U; la otra está "respaldado por el sofá de tu primo". De acuerdo con ello, el riesgo de perder su dinero es mucho mayor en el escenario de restaurante, y para inducir a realizar la inversión, los rendimientos esperados tienen que ser mucho más alto que el 1 % que la letra del Tesoro pagaría. A la inversa, entre más segura la inversión, menor es la tasa de rendimiento esperada deber ser.

Hay una relación fundamental que debe tener en cuenta al pensar en las tasas de rendimiento: entre más arriesgada la empresa, mayor es la tasa de retorno esperada. Por ejemplo, la inversión en un restaurante es mucho más riesgosa que invertir en Bonos del Tesoro; una está respaldado por el gobierno de E.E.U.U; la otra está “respaldado por el sofá de tu primo”. De acuerdo con ello, el riesgo de perder su dinero es mucho mayor en el escenario de restaurante, y para inducir a realizar la inversión, los rendimientos esperados tienen que ser mucho más alto que el 1 % que la letra del Tesoro pagaría. A la inversa, entre más segura la inversión, menor es la tasa de rendimiento esperada deber ser.

Las tasas de retorno a menudo implican la incorporación de otros factores, como las "mordidas" que hicieron la inflación y los impuestos a las ganancias; el lapso de tiempo transcurrido, y cualquier capital adicional que los inversores hacen en la empresa. Si la inversión es extranjera, entonces los cambios en los tipos de cambio, por tanto, afectarán a la tasa de retorno.

Las tasas de retorno a menudo implican la incorporación de otros factores, como las "mordidas" que hicieron la inflación y los impuestos a las ganancias; el lapso de tiempo transcurrido, y cualquier capital adicional que los inversores hacen en la empresa. Si la inversión es extranjera, entonces los cambios en los tipos de cambio, por tanto, afectarán a la tasa de retorno.

Tasa interna de retorno

La tasa interna de retorno (*IRR, internal rate of return*) es la tasa de interés a la que el valor presente neto de todos los flujos de efectivo (tanto positivos como negativos) de un proyecto o inversión es igual a cero.

La tasa interna de retorno se utiliza para evaluar el atractivo de un proyecto o inversión. Si IRR de un nuevo proyecto es superior a la tasa requerida de una empresa de retorno, el proyecto hizo es deseable. Si IRR está por debajo de la tasa de rendimiento requerida, el proyecto debe ser rechazado.

La tasa interna de retorno se utiliza para evaluar el atractivo de un proyecto o inversión. Si IRR de un nuevo proyecto es superior a la tasa requerida de una empresa de retorno, el proyecto hizo es deseable. Si IRR está por debajo de la tasa de rendimiento requerida, el proyecto debe ser rechazado.

La tasa interna de retorno se utiliza para evaluar el atractivo de un proyecto o inversión. Si IRR de un nuevo proyecto es superior a la tasa requerida de una empresa de retorno, el proyecto hizo es deseable. Si IRR está por debajo de la tasa de rendimiento requerida, el proyecto debe ser rechazado.

La ecuación para IRR es

$$0 = P_0 + \frac{P_1}{(1+IRR)} \frac{P_2}{(1+IRR)^2} + ... + \frac{P_n}{(1+IRR)^n}; \qquad \text{(IRR)}$$

donde $P_0, P_1, ..., P_n$ son los flujos de caja en los periodos correspondientes; y IRR es iguala la *tasa de retorno interno* del proyecto.

Ejemplo 14.1.

Suponga que la empresa XYZ debe decidir si compra una pieza de equipo de fábrica de \$300,000. El equipo sólo duraría tres años, pero se espera que genere \$150,000 de beneficio anual adicional durante esos años. Por lo tanto, la empresa XYZ cree que puede vender el equipo como chatarra después de alrededor de \$10,000. Usando la IRR, la empresa XYZ puede determinar si la compra del equipo tiene un mejor uso de su dinero en efectivo que sus otras opciones de inversión, que debe devolver alrededor del 10 %.

Ejemplo 14.1.

Suponga que la empresa XYZ debe decidir si compra una pieza de equipo de fábrica de \$300,000. El equipo sólo duraría tres años, pero se espera que genere \$150,000 de beneficio anual adicional durante esos años. Por lo tanto, la empresa XYZ cree que puede vender el equipo como chatarra después de alrededor de \$10,000. Usando la IRR, la empresa XYZ puede determinar si la compra del equipo tiene un mejor uso de su dinero en efectivo que sus otras opciones de inversión, que debe devolver alrededor del 10 %.

Aquí está la ecuación de IRR para este escenario:

$$
\begin{aligned}
0 \approx -300,000 &+ (150,000)/(1+.2431) + (150,000)/(1+.2431)^2 \\
&+ (150,000)/(1+.2431)^3 + 10,000/(1+.2431)^4
\end{aligned}
$$

IRR de la inversión es de 24,31 %, que es la tasa que hace que el valor presente del flujo de la inversión de los flujos sea igual a cero. Desde un punto de vista puramente económico, la empresa XYZ debería comprar el equipo ya que este genera un 24,31 % para la empresa, muy superior a los 10 % de retorno plausible de otras inversiones.

IRR de la inversión es de 24,31 %, que es la tasa que hace que el valor presente del flujo de la inversión de los flujos sea igual a cero.Desde un punto de vista puramente económico, la empresa XYZ debería comprar el equipo ya que este genera un 24,31 % para la empresa, muy superior a los 10 % de retorno plausible de otras inversiones.

Una regla general es que IRR no se puede derivar analíticamente. En lugar de ello, IRR debe encontrarse usando ensayo y error para obtener el tipo adecuado.

Sin embargo, podemos usar el siguiente algoritmo para aproximar la solución

1. Diremos que $NPV(r, \texttt{cashflows})$ es el valor presente neto a una tasa r de los flujos de caja `cashflows`
2. Definimos una aproximación inicial de r, digamos $r_0 = 1.00$.
3. Para un número suficiente de repeticiones, hacemos el siguiente cálculo inductivo

$$r_{k+1} = r_k \left(1 - \frac{NVP(r_k, \texttt{cashflows})}{\texttt{inversión}}\right)$$

.

En SageMath, podríamos implementarlo de la siguiente manera:

```
def IRR_f(cashflows,interations=100):
  rate=1.0
  investment=cashflows[0]
  for i in range(1,interations+1):
    rate=rate*(1-npv_f(rate,cashflows)/investment)
    #de manera alternativa
    #rate*=(1-npv_f(rate,cashflows)/investment)
  return rate
```

En teoría, $r_k \to r$, pero generalmente no alcanzaremos el valor exacto. Sin embargo, podemos especificar una número máximo de interacciones o una tolerancia.

En teoría, $r_k \to r$, pero generalmente no alcanzaremos el valor exacto. Sin embargo, podemos especificar una número máximo de interacciones o una tolerancia.

Aproximaciones de IRR del ejemplo 14.1

Interaccion	Aproximacion	NVP
0	1.00000000000000	−168125.000000000
1	0.439583333333333	−70816.6380466875
2	0.335817287306590	−37578.2079171559
3	0.293752581157982	−21603.3486031797
4	0.272599116445183	−12916.8579945666
5	0.260862036189960	−7891.80765723905
6	0.253999792807671	−4882.74536256713
7	0.249865738439589	−3043.97093323308
8	0.247330458289519	−1906.47966494586
9	0.245758689992016	−1197.49205974077
10	0.244777709725757	−753.515683519690
11	0.244162896914909	−474.679212685760
12	0.243776566742661	−299.236737110717
13	0.243533410394607	−188.722066397828

Tal como para NPV, `Numpy` tiene ya implementada una función para IRR. Aquí un ejemplo de como usarla en nuestro ejemplo:

```
import numpy as np
cashflows=[-300000, 150000,150000,150000,10000]
print "Tasa de retorno interno =", np.irr(cashflows)
```