

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки
до виконання розрахункових та контрольних робіт

Гончаренко Я.В.

ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Класичне означення ймовірності випадкової події

1. На десяти картках написані цифри: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Випадковим чином вибирається три картки. Знайти ймовірності того, що: а) в порядку появи цифр буде отримано число 123; б) з отриманих цифр можна скласти число 123.

2. Кидаються одночасно дві гральні кістки. Знайти ймовірності наступних подій: а) сума цифр, що випали дорівнює 8; б) добуток дорівнює 8; в) сума цифр дорівнює 8, а добуток — 15.

3. З урни, що містить 10 пронумерованих куль, навмання виймають одну за однією всі кулі. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих куль будуть йти по порядку: 1, 2, 3, ..., 10.

4. Гральна кістка кинута два рази. Знайти ймовірність того, що обидва рази з'явиться: а) однакове число очок б) різне число очок.

5. В урні міститься 10 пронумерованих куль. З урни навмання виймають одну за одною 10 куль, при чому номер кожної кулі записується, після чого вона повертається в урну і перемішується з іншими. Знайти ймовірність того, що буде записана наступна послідовність номерів: 1, 2, ..., 10.

6. У ящику 100 деталей, з них 10 бракованих. Навмання вибирають 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вибраних деталей рівно 3 стандартні.

7. В урні 6 білих і 4 чорні кулі. З урни навмання виймаються одночасно дві кулі. Знайти ймовірність того, що: а) обидві кулі білі; б) обидві кулі чорні; в) одна біла, а друга чорна.

8. З п'яти букв розрізної азбуки складене слово "книга". Дитина, що не вміє читати, розсипала ці букви, потім зібрала їх знову в ряд. Знайти ймовірність того, що в неї знову вийшло слово "книга".

9. Дитина грає з десятьма буквами азбуки: А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. Знайти ймовірність того, що вона випадково складе слово "МАТЕМАТИКА".

10. 10 чоловік випадковим чином розсаджуються за круглим столом. Знайти ймовірність того, що господар і господиня будуть сидіти поруч.

11. У ліфті семиповерхового будинку на першому поверсі увійшли три пасажери. Кожен з них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: а) всі пасажери вийдуть на п'ятому поверсі; б) всі пасажери вийдуть на одному поверсі; у) всі пасажери вийдуть на різних поверхах.

12. Телефонний номер м. Дніпропетровська складається з 6 цифр. Знайти ймовірність того, що при наборі номера навмання: а) всі цифри різні; б) всі цифри однакові.

13. Цифровий замок містить на спільній осі 4 диски, кожен з яких розділений на 10 пронумерованих секторів. Замок відкривається тільки в тому випадку, коли цифри утворюють деяке чотиризначне число. Яка ймовірність відкрити замок, набравши довільні 4 цифри?

14. У лотереї 100 квитків, серед них один виграш в 50 грн., 3 виграші по 25 грн., 6 виграшів по 10 грн., 15 виграшів по 3 грн. Учасник купує один квиток. Знати ймовірність: а) виграти не менше 25 грн.; б) виграти не більше 25 грн.

15. У лотереї 100 квитків, причому на 25 квитків випали виграші. Учасник купує 3 квитки. Яка ймовірність виграшу: а) на 2 квитки; б) на 3 квитки.

16. Куб, всі грані якого забарвлені, розрізано на тисячу кубиків однакового розміру, які потім ретельно перемішані. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик буде мати забарвлених граней: а) одну; б) дві; в) три.

17. Студент знає 20 з 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає: а) всі три питання білета; б) два питання білета з трьох.

18. В урні 5 білих і 5 чорних куль. З урни навмання виймають 5 куль. Яка ймовірність того, що: а) всі 5 куль будуть білими; б) 3 кулі — білі, а 2 — чорні.

19. У партії з 20 деталей є 18 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед 5 взятих випадковим чином деталей виявиться: а) 3 стандартні; б) 1 бракована.

20. Телефонний номер АТС м. Нікополя складається з 5 цифр. Знайти ймовірність того, що при випадковому наборі номера: а) всі його цифри будуть різними; б) всі цифри будуть однаковими.

21. У коробці міститься 6 однакових пронумерованих кубиків. Навмання по одному витягують 6 кубиків. Знайти ймовірність того, що номери кубиків будуть записані в зростаючому порядку, якщо кубики витягуються: а) без повернення; б) з поверненням.

22. У ящику є 20 деталей, серед яких 15 пофарбованих. Робітник навмання витягує 3 деталі. Знайти ймовірність того, що: а) всі 3 деталі пофарбовані; б) хоча б дві деталі пофарбовані.

23. У ящику 100 деталей, з них 10 бракованих. Навмання вибирають 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вибраних деталей: а) немає бракованих; б) всі браковані.

24. Пристрій складається з 10 елементів, з яких 3 зношені. При включенні пристрою включаються випадковим чином 3 елементи. Знайти ймовірність того, що включеними виявляться: а) незношені елементи; б) 2 зношених.

25. Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри і, пам'ятаючи, що ці цифри різні, почав набирати їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри з першої спроби. Скільки може бути у абонента невдалих спроб?

26. На складі є 20 кінескопів, причому 10 з них виготовлені дніпропетровським заводом. Знайти ймовірність того, що серед 5 взятих навмання кінескопів виявиться 3 кінескопи дніпропетровського заводу.

27. У групі 25 студентів, серед яких 6 відмінників. По списку випадковим чином відібрані 10 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних буде 5 відмінників.

28. У коробці 10 однакових виробів, причому 7 з них пофарбовані. Навмання вибрано 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед вибраних виявиться хоча б 3 пофарбовані вироби.

29. На електростанції 15 змінних інженерів, з них 3 жінки. У зміну зайнято 3 інженери, знайти ймовірність того, що у випадково вибрану зміну чоловіків виявиться: а) один; б) два; в) три.

30. На складі 50 виробів, з них 8 бракованих. Навмання вибирають 3 вироби. Знайти ймовірність того, що серед вибраних виробів: а) 1 бракований; б) хоча б 1 бракований.

2. Геометричне означення ймовірності

1. До залізничної каси у випадкові моменти часу в межах 10 хв. підходить 2 пасажирів. Знайти ймовірність того, що пасажирів, який підійшов другим, доведеться очікувати в черзі, якщо термін обслуговування кожного пасажирів складає 2 хв.

2. Два дійсні числа вибираються випадковим чином з відрізка $[-1; 1]$. Знайти ймовірність того, що їх сума більше нуля, а добуток менше нуля.

3. Партія з 100 виробів випадковим чином розподілена між трьома контролерами. Знайти ймовірність того, що кожен контролер отримає не менше 25 виробів.

4. Два дійсні числа p і q випадковим чином вибираються з інтервалу $(-1; 1)$. Знайти ймовірність того, що рівняння $x^2 + px + q = 0$ має дійсні додатні корені.

5. Відстань між пунктами M і N літак долає за 30 хв., а автобус — за 5 год. Інтервал руху літаків — 6 год. Автобус в випадковий момент часу відправився з M в N . Знайти ймовірність того, що черговий літак прибуде в N раніше автобуса.

6. Кожен з двох контролерів перевіряє на протязі години не більше 10 виробів. Знайти ймовірність того, що обидва контролери перевіряють на протязі години від 12 до 18 виробів.

7. Два літаки прибувають до аеропорту у випадковий момент часу від 12⁰⁰ до 13⁰⁰. Знайти ймовірність того, що літакові, що прибув другим, не доведеться очікувати посадки, якщо посадка може відбутися не раніше, ніж через 10 хв. після посадки першого літака.

8. Два дійсні числа p і q випадковим чином вибираються з інтервалу $(-1; 1)$. Знайти ймовірність того, що рівняння $x^2 + px + q = 0$ має дійсні корені одного знаку.

9. Двісті виробів, що сходять з конвеєра, випадковим чином розподіляються в 3 контейнери, місткістю не менше 200 виробів кожен. Знайти ймовірність того, що в кожен контейнер попаде не більше 100 виробів.

10. На відрізку довжиною 15 см випадковим чином вибираються 2 точки. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками більше 7 см.

11. Відстань між пунктами M і N літак долає за 1 год., а поїзд — за 18 год. Поїзд у випадковий момент часу відправився з M в N . Знайти ймовірність того, що черговий літак прибуде в N раніше поїзда, якщо між M і N здійснюється один щоденний рейс в один і той же час.

12. Кожен з трьох контролерів перевіряє на протязі години не більше 10 виробів. Знайти ймовірність того, що сумарна кількість виробів, перевірених цими контролерами на протязі години, виявиться більше 10.

13. Два пароплави повинні прибути до одного і того ж причалу. Час прибуття обох пароплавів незалежний і рівноможливий на протязі 6 год. Знайти ймовірність того, що жоден з пароплавів не буде чекати звільнення причалу, якщо час стоянки кожного пароплаву одна година.

14. Два дійсні числа a і b випадковим чином вибираються з інтервалу $(-1; 1)$. Знайти ймовірність того, що рівняння $x^2 + ax + b = 0$ має дійсні корені різних знаків.

15. Два дійсні числа вибираються випадковим чином з відрізка $[0; 1]$. Знайти ймовірність того, що їх сума не більше 1, а добуток не менше $\frac{2}{9}$.

16. Два літаки прибувають в аеропорт у випадкові моменти часу від 15⁰⁰ до 15³⁰. Розвантаження обох літаків виконує одна бригада працівників. Знайти ймовірність

того, що літаку, що прибув другим, не доведеться очікувати розвантаження, якщо на розвантаження кожного літака необхідно 10 хв.

17. Кожне з двох дійсних додатних чисел не більше 4. Знайти ймовірність того, що їх добуток виявиться не більше 4.

18. Два пароплави повинні підійти до одного і того ж причалу. Час прибуття обох пароплавів незалежний і рівноможливий на протязі однієї доби. Знайти ймовірність того, що одному з пароплавів доведеться очікувати звільнення причалу, якщо час стоянки першого пароплава — одна година, другого — дві години.

19. З відрізка $[-1; 2]$ випадковим чином вибрані два числа. Знайти ймовірність того, що їх сума більше одиниці, а добуток — менше одиниці.

20. На відрізку довжиною 12 см випадковим чином вибрані дві точки. Знайти ймовірність того, що відстань між ними буде менше 5 см.

21. Два дійсні числа вибираються випадковим чином з відрізка $[0; 4]$. Знайти ймовірність того, що їх сума більше 4, а різниця менше 2.

22. Екіпажам двох літаків необхідно передати повідомлення по радіо в будь-який час від 8^{00} до 8^{10} . Час, необхідний на передачу повідомлення, — 2 хв. Знайти ймовірність того, що повідомлення не перетинатимуться у часі, якщо для кожного з екіпажів рівномірно почати передачу в будь-який момент у вказаних межах.

23. Дві дійсні числа p і q вибираються випадковим чином з інтервалу $(-1; 1)$. Знайти ймовірність того, що рівняння $x^2 + px + q = 0$ має дійсні корені.

24. На колі радіуса R випадковим чином вибираються три точки M , N і P . Знайти ймовірність того, що трикутник MNP гострокутний.

25. Кожен з трьох робітників виготовляє на протязі зміни не більше 100 виробів. Знайти ймовірність того, що ці робітники разом виготовлять за зміну більше 100 виробів.

26. Два дійсні числа вибираються випадковим чином з відрізка $[0; 4]$. Знайти ймовірність того, що їх сума більше 4, а добуток менше 4.

27. Кожен з 200 пасажирів придбав квиток на один з трьох авіарейсів. Знайти ймовірність того, що на кожному рейсі виявиться не менше 50 пасажирів, якщо кількість місць у кожному літаку — 200.

28. Два дійсні числа p і q випадковим чином вибираються з інтервалу $(-2; 2)$. Знайти ймовірність того, що рівняння $x^2 + px + q = 0$ не має дійсних коренів.

29. В прямокутнику $\{(x, y) : 0 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1\}$ випадковим чином вибрана точка. Знайти ймовірність попадання точки в область, обмежену лініями: $y = 0$, $y = \ln x$, $x = e$.

30. На кожній з двох поточних ліній на протязі зміни виготовляється не більше 15 виробів. Знайти ймовірність того, що загальна кількість виробів, виготовлених на обох лініях, буде знаходитись в межах від 24 до 28.

3. Теореми додавання і множення ймовірностей

1. Два стрільці стріляють по мішені один раз. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця при одному пострілі дорівнює 0,6, для другого — 0,7. Знайти ймовірність того, що в мішень попаде: а) хоч би один стрілець; б) тільки один стрілець; в) обидва стрільці.

2. Три студенти складають іспит. Ймовірність того, що перший студент складе іспит дорівнює 0,9, другий — 0,7, третій — 0,6. Знайти ймовірність того, що: а) два студенти складуть іспит; б) всі три студенти складуть іспит; в) хоч би один студент складе іспит.

3. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом деякого часу t його уваги потребуватиме перший верстат дорівнює 0,8, другий — 0,7, третій — 0,6. Знайти ймовірність того, що протягом часу t уваги робітника: а) не потребуватиме жоден верстат; б) потребуватиме хоч би один верстат; в) потребуватиме який-небудь один верстат.

4. Ймовірність того, що студент відповість на перше питання з трьох в екзаменаційному білеті дорівнює 0,9, на друге — 0,8, на третє — 0,7. Визначити ймовірність того, що студент складе екзамен, якщо для цього необхідно відповісти: а) на всі три питання; б) хоч би на два питання.

5. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години він буде обслуговувати перший верстат дорівнює 0,7, другий — 0,6, третій — 0,5. Визначити ймовірність того, що протягом години він буде обслуговувати: а) всі три верстати; б) який-небудь верстат; в) хоч би один верстат.

6. Три студенти здають екзамен. Ймовірність здати на "відмінно" для першого студента дорівнює 0,8, для другого — 0,6, для третього — 0,5. Знайти ймовірність того, що: а) тільки два студенти складуть екзамен на "відмінно"; б) хоч би один студент складе екзамен на "відмінно".

7. З трьох гармат зробили залп по цілі. Ймовірності враження цілі першою, другою і третьою гарматами відповідно дорівнюють 0,7; 0,6; 0,9. Знайти ймовірність того, що в ціль влучить: а) тільки один снаряд; б) тільки два снаряди; в) всі три снаряди.

8. Для сигналізації про аварію встановлено три незалежно працюючі пристрої. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший пристрій, дорівнює 0,6, другий — 0,9 і третій — 0,8. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють: а) тільки один пристрій; б) хоч би один пристрій; в) жоден не спрацює.

9. Три стрільці в однакових і незалежних умовах зробили по одному пострілу по одній і тій же мішені. Ймовірність попадання в мішень першим стрільцем дорівнює 0,9, другим — 0,8, третім — 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один з стрільців попаде в мішень; б) тільки два стрільці попадуть в мішень; в) хоч би один стрілець попаде в мішень.

10. Студент знає 45 з 60 питань програми. Кожен екзаменаційний білет містить три питання. Знайти ймовірність того, що студент відповість: а) на всі три питання; б) тільки на два питання; в) тільки на одне питання.

11. З трьох гармат зроблений залп по цілі. Ймовірність влучення при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,8, з другої — 0,7, з третьої — 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) жодна гармата не влучить; б) тільки одна гармата влучить; в) хоч би одна гармата влучить.

12. Студент знає 30 з 40 питань програми. У білеті міститься три питання. Знайти ймовірність того, що: а) студент знає відповідь на всі три питання; б) тільки на два питання; в) хоч би на два питання.

13. Два стрільці зробили по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем дорівнює 0,9, другим — 0,8. Знайти ймовірність того, що: а) обидва стрільці влучать в мішень; б) жоден не влучить; в) тільки один стрілець влучить в мішень; г) хоч би один з стрільців влучить в мішень.

14. Для сигналізації про аварію встановлено три незалежно працюючі пристрої. Ймовірність того, що перший пристрій спрацює, дорівнює 0,8; для другого і третього ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,9 і 0,7. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють: а) тільки один пристрій; б) жоден не спрацює; в) хоч би один пристрій.

15. Два стрільці стріляють в мішень. Ймовірність попадання в мішень першим стрільцем при одному пострілі дорівнює 0,6, другим — 0,8. Знаючи, що кожен стрілець стріляє один раз, знайти ймовірність того, що: а) обидва стрільці попадуть в мішень; б) в мішень попаде тільки другий стрілець; в) хоч би один з стрільців попаде в мішень.

16. Студент знає 40 з 50 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає відповідь: а) на всі три питання, що містяться в білеті; б) на два питання; в) хоч би на два питання.

17. Десять мисливців стріляють по черзі в одну і ту ж мішень, проводячи по одному пострілу. Після першого попадання мішень руйнується і стрільба припиняється. Ймовірність попадання в мішень для перших п'яти мисливців дорівнює 0,4, а для інших п'яти мисливців — 0,7. Яка ймовірність того, що попадає в мішень: а) перший мисливець; б) п'ятий; в) сьомий?

18. Три стрільці зробили по одному пострілу в мішень. Ймовірність попадання в мішень для кожного стрільця дорівнює 0,9. Знати, ймовірність того, що: а) всі три стрільці попадуть в мішень; б) тільки два попадуть в мішень; в) хоч би один стрілець попаде в мішень.

19. Від вокзалу до аеропорту відправилися два автобуси. Ймовірність своєчасного прибуття кожного автобусу в аеропорт дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) обидва автобуси прибудуть вчасно; б) тільки один автобус прибуде вчасно; в) хоч би один автобус прибуде вчасно; г) жоден з автобусів не прибуде вчасно.

20. Три стрільці зробили залп по мішені. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця дорівнює 0,7, для другого — 0,8, для третього — 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) хоч би один стрілець попаде в мішень; б) тільки два стрільці попадуть в мішень; в) всі три стрільці попадуть в мішень.

21. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом часу t він обслуговуватиме перший верстат дорівнює 0,5, другий — 0,6, третій — 0,7. Знайти ймовірність того, що протягом часу t : а) робітник не обслуговуватиме жоден верстат; б) робітник обслуговуватиме хоч би один верстат; в) робітник обслуговуватиме тільки два верстати.

22. Від вокзалу до аеропорту відправилися два автобуси. Ймовірність своєчасного прибуття першого автобуса дорівнює 0,95, другого — 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) обидва автобуси спізняться; б) тільки один прибуде вчасно; в) хоч би один прибуде вчасно.

23. Три стрільці стріляють в мішень. Ймовірність влучення для першого стрільця при одному пострілі дорівнює 0,8, для другого — 0,7, для третього — 0,6. Знаючи, що кожен стрілець стріляє один раз, знайти ймовірність того, що: а) всі три не влучать; б) хоч би один влучить; в) тільки один влучить в мішень.

24. Студент знає 50 з 60 питань програми. Кожен екзаменаційний білет містить три питання. Знайти ймовірність того, що: а) студент знає відповідь на всі три питання; б) на два питання; в) хоч би на два питання.

25. З трьох гармат зроблений залп по цілі. Ймовірність влучення при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,9, з другої — 0,7, і третьої — 0,8. Знайти ймовірність того, що: а) тільки друга і третя влучать; б) тільки одна гармата влучить; в) всі три влучать.

26. Для сигналізації про аварію встановлені три незалежно працюючі пристрої. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший пристрій дорівнює 0,95, другий — 0,9, третій — 0,8. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють: а) тільки один пристрій; б) хоч би один; в) жоден не спрацює.

27. Ймовірність того, що студент відповість на перше з трьох питань екзаменаційного білету дорівнює 0,9, на другий — 0,8, на третій — 0,7. Знайти ймовірність того, що студент складе екзамен, якщо для цього йому треба відповісти: а) на всі три питання; б) хоч би на два питання.

28. З чотирьох гармат зроблений залп по цілі. Ймовірності влучення для першої, другої, третьої і четвертої гармат відповідно рівні 0,9; 0,8; 0,7 і 0,6. Знайти ймовірність того, що: а) всі чотири гармати влучать; б) жодна не влучить; в) хоч би одна влучить.

29. Оператор обслуговує три станки. Ймовірність того, що протягом години він буде обслуговувати перший станок, дорівнює 0,7, другий — 0,6, третій — 0,5. Знайти ймовірність того, що протягом години оператор обслуговуватиме: а) тільки один станок; б) хоч би один станок; в) тільки другий і перший станки.

30. Три студенти складають екзамен. Ймовірність того, що перший студент складе екзамен, дорівнює 0,9, другий — 0,8, третій — 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) тільки перший студент складе екзамен; б) тільки другий і третій складуть екзамен; в) всі три студенти складуть екзамен.

4. Формула повної ймовірності. Формули Байеса

1. У цеху три типи автоматичних верстатів виготовляють однакові деталі. Верстатів першого типу 5 штук, другого — 3 і третього — 2. Продуктивність їх однакова, але якість роботи різна. Відомо, що верстати першого типу випускають 94% деталей відмінної якості, другого — 90% і третього — 95%. Взята випадковим чином деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь виготовлена на верстаті: а) першого типу; б) першого або третього типів.

2. У трьох ящиках знаходяться однотипні вироби: в першому 20 виробів, з них 3 нестандартні, у другому 25 виробів, з них 4 нестандартні і в третьому 30 виробів, з них 6 нестандартних. З випадковим чином вибраного ящика навмання вибирається один виріб, який виявився нестандартним. Знайти ймовірність того, що виріб знаходився: а) в третьому ящику; б) в першому ящику.

3. У групі 10 стрільців. Для 5 з них ймовірність влучення в мішень 0,8, для трьох — 0,5, для всіх інших — 0,25. Постріл, зроблений випадково вибраним стрільцем виявився влучним. Яка ймовірність того, що цей постріл був зроблений стрільцем: а) першої групи? б) другої групи? в) третьої групи?

4. У трьох однакових коробках знаходяться олівці різної твердості, позначені номерами 1 і 2. В першій коробці 6 олівців № 1 і 4 олівці № 2, у другій — відповідно 7 і 3, в третій — 2 і 8. З однієї з коробок взятий один олівець, що виявився твердості № 2. Знайти ймовірність того, що взятий олівець знаходився: а) в першій коробці; б) у другій; в) у третій.

5. З 18 стрільців 5 попадають в мішень з ймовірністю 0,8; 7 — з ймовірністю 0,6; 6 — з ймовірністю 0,6. Навмання вибраний стрілець зробив постріл, але в мішень не попав. До якої з груп найімовірніше належить цей стрілець?

6. Три заводи виготовляють електролампи. Перший завод випускає 45% всієї кількості електроламп, другий — 40%, третій — 15%. Продукція першого заводу містить 70% стандартних ламп, другого — 80%, третього — 90%. В магазин поступає продукція всіх трьох заводів. Яка ймовірність того, що: 1) куплена лампа виявиться стандартною; 2) лампа виготовлена на а) першому; б) другому; в) третьому заводі, якщо вона виявилася стандартною?

7. У ящику є вісім револьверів однієї системи і однакових на вигляд. З них два непристріляних. Для стрільця ймовірність влучити з пристріляного револьвера дорівнює 0,8, а з непристріляного — 0,6. Яка ймовірність того, що постріл, зроблений з випадковим чином вибраного револьвера буде влучним? Яка ймовірність того, що стріляли з пристріляного револьвера, якщо постріл був влучним?

8. На фабриці автомати типу A , B і C виготовляють відповідно 25%, 35% і 40% всіх виробів. В їх продукції брак складає відповідно 5, 4, і 2%. Яка ймовірність того, що: а) випадково вибраний виріб є бракованим? б) вибраний навмання виріб, який виявився бракованим, виготовлений автоматом типу A , B , C ?

9. Є десять однакових урн, в дев'яти з них знаходиться по дві чорних і дві білих кулі, а в одній — п'ять білих і одна чорна куля. З урни, вибраної випадковим чином, витягнута біла куля. Яка ймовірність того, що куля витягнута з урни, що містить п'ять білих кулі?

10. Команда складається з 10 стрільців, серед яких два майстри спорту (в середньому мають 10 влучень з 10 пострілів), два першорозрядники (9 влучень з 10

пострілів), чотири другорозрядники (8 влучень з 10 пострілів) і два стрільці, що не мають розряду (7 влучень з 10 пострілів). Яка ймовірність того, що викликаний навмання стрілець виконає три влучних постріли підряд? Знайти ймовірність того, що стрілець, який виконав три влучні постріли підряд, був майстром спорту?

11. Деталь, що зазнала обробки одним з трьох інструментів, була визнана непридатною. Знайти ймовірність того, що деталь була визнана непридатною внаслідок обробки першим, другим або третім інструментом, якщо ймовірності несправності для них відповідно дорівнюють: 0,2; 0,4; 0,6.

12. Одну і ту ж операцію виконують робітники третього, четвертого і п'ятого розрядів. При цьому робітники, що мають п'ятий розряд, допускають всього 2% браку, четвертий — 3%, третій — 5% браку. При перевірці деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність, що її виготовив робітник третього, четвертого або п'ятого розрядів, якщо з 10 чоловік двоє мають п'ятий розряд, 5 — четвертий, а інші — третій розряд.

13. З першого верстата поступає 40%, з другого — 30%, з третього — 20%, з четвертого — 10% всіх деталей. Серед деталей першого верстата 1% бракованих, серед деталей другого — 0,2%, третього — 0,3%, четвертого — 0,5%. На збирання поступила бракована деталь. Яка ймовірність того, що вона була виготовлена другим або третім верстатом?

14. Третя частина однієї з трьох партій деталей є другосортною, інші деталі у всіх партіях першого сорту. Деталь, взята з однієї партії, виявилася першосортною. Визначити ймовірність того, що деталь була взята з партії, що має другосортні деталі.

15. У команді спортсменів 4 лижника, 6 бігунів і 10 велосипедистів. Ймовірність виконати норму майстра спорту для лижника дорівнює 0,2, для бігуна — 0,15, для велосипедиста — 0,1. Викликаний навмання спортсмен не виконав норму. Визначити ймовірність того, що це був бігун.

16. Телеграфне повідомлення складається з сигналів "точка" і "тире". Статистичні властивості перешкод такі, що спотворюється в середньому $\frac{2}{5}$ повідомлень "точка" і $\frac{1}{3}$ повідомлень "тире". Відомо, що, серед сигналів, що передаються, "точка" і "тире" зустрічаються у відношенні 5 : 3. Знайти ймовірність того, що прийнято правильний сигнал, якщо: а) прийнято сигнал "точка"; б) прийнято сигнал "тире".

17. Є 5 гвинтівок, з яких 3 з оптичним прицілом. Ймовірність влучення при одному пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом — 0,9, без оптичного прицілу — 0,7. Постріл, зроблений з навмання вибраної гвинтівки, виявився влучним. Визначити ймовірність того, що постріл зроблений: а) з гвинтівки з оптичним прицілом; б) з гвинтівки без оптичного прицілу.

18. На збирання поступають деталі, виготовлені на чотирьох верстатах. Процент браку для першого верстата дорівнює 0,1%, для другого — 0,2%, для третього — 0,25% і для четвертого — 0,5%. Продуктивність верстатів відноситься відповідно як 9 : 3 : 2 : 1. Деталь, що поступила на збирання, виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на першому або четвертому верстаті.

19. У тирі є 5 гвинтівок, ймовірності попадання з яких рівні відповідно: 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 і 0,9. Зроблений з навмання вибраної гвинтівки постріл дав промах. Визначити ймовірність того, що постріл був зроблений: а) з першої; б) з п'ятої гвинтівки.

20. У приймачі є 6 ламп першого типу і 8 ламп другого. Ймовірність виходу з ладу за час t для лампи першого типу дорівнює 0,002, а для ламп другого типу —

0,004. Приймач вийшов з ладу через поломку однієї лампи. Яка ймовірність того, що вийшла з ладу лампа: а) першого типу; б) другого типу ?

21. Товарознавець перевіряє три партії взуття, що поступили з мінської, лєнінградської і харківської взуттєвих фабрик. Відомо, що кількість взуття мінської фабрики в 2 рази менше, ніж лєнінградської, а лєнінградської в три рази менше, ніж харківської. Ймовірність того, що навання взята пара взуття мінської фабрики буде забракована, рівна 0,04, лєнінградської — 0,02, харківської — 0,10. Навання взята пара взуття виявилася бракованою. Знайти ймовірність того, що пара взуття зроблена на харківській фабриці.

22. По команді постріл може бути зроблений з будь-якої з трьох гармат. Ймовірність влучення для першої гармати дорівнює 0,95, для другої — 0,85, для третьої — 0,9. Постріл виявився влучним. Яка ймовірність того, що стріляла перша гармата ?

23. У групі з 24 чоловік, що здають екзамени, в інститут, було: 3 учні, які в школі вчилися на "відмінно вони знали відповіді на всі питання; 12 учнів, що закінчили школу без трійок, вони знали відповіді на 90% питань; 6 абітурієнтів, що закінчили технікуми і могли відповісти на 80% питань; і троє, що вчилися у вечірніх школах, вони могли дати відповіді на 60% питань. Один з абітурієнтів відповів на всі три питання. Яка ймовірність того, що: а) відповів відмінник з школи; б) відповів учень, що закінчив технікум ?

24. У групі 20 чоловік, з них 12 хлопців і 8 дівчат. З хлопців до семінару підготувалися 5 чоловік, а з дівчат — 3. Викликаний студент не відповів на запитання. Яка ймовірність того, що: а) була викликана дівчина; б) був викликаний хлопець ?

25. Два автомати виготовляють однакові деталі. Ймовірність виготовлення деталі вищої якості для першого дорівнює 0,92, для другого — 0,8. Перший автомат виготовляє деталей в три рази більше, ніж другий. Навання взята деталь виявилася вищої якості. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена: а) першим автоматом, б) другим автоматом.

26. На першому заводі на кожні 100 виробів виготовляється в середньому 90, на другому — 95, на третьому — 85 виробів першого сорту. У магазині продукція кожного заводу становить відповідно 50%, 30% і 20%. Яка ймовірність того, що куплений виріб першого сорту був виготовлений на першому, другому, третьому заводах ?

27. Три мисливця одночасно вистрілили по вєпру, який був вбитий однією кулею. Як повинні мисливці розділити вєпра, якщо його вага виявилася рівною 100 кг, а ймовірності попадання кожною мисливця рівні відповідно: 0,2; 0,4 і 0,6 ?

28. При механічній обробці верстат звичайно працює в двох режимах: рентабельному і нерентабельному. Рентабельний режим спостерігається на протязі 80% всього робочого часу, нерентабельний — 20%. Ймовірність виходу верстата з ладу за час t роботи в рентабельному режимі дорівнює 0,1, в нерентабельному — 0,7. Станок вийшов з ладу за час t . Знайти ймовірність того, що він: а) працював в рентабельному режимі; б) працював в нерентабельному режимі.

29. При відхиленні від нормального режиму роботи автомата спрацьовує сигналізатор С-1 з ймовірністю 0,8, а сигналізатор С-2 — з ймовірністю 1. Ймовірності того, що автомат забезпечений сигналізатором С-1 або С-2 відповідно рівні 0,6 і 0,4. Отримано сигнал про розладнання автомата. Що ймовірніше: а) автомат забезпечений сигналізатором С-1; б) автомат забезпечений сигналізатором С-2?

30. У першому ящику міститься 20 деталей, з них 15 стандартних; у другому — 30 деталей, з них 24 стандартних; а в третьому — 10 деталей, з них 6 стандартних. Навмання взята деталь з випадковим чином вибраного ящика виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь взята: а) з першого ящика; б) з другого ящика; в) з третього ящика.

5. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі, теорема Муавра-Лапласа, формула Пуассона

1. Комплект виробів містить 30% нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед відібраних з комплекту випадковим чином 5 виробів буде:

- а) тільки один нестандартний;
- б) хоча б один нестандартний.

2. Ймовірність того, що пасажир, що звернувся в авіакасу, замовить білет в пункт N , дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що з 100 пасажирів, що звернулись в касу, білет до пункту N замовлять:

- а) менше 15 чоловік;
- б) від 5 до 12 чоловік;
- в) більше 20 чоловік.

3. Радіоприлад складається з 1000 мікроелементів. Ймовірність відмови одного елемента на протязі доби становить 0,002 і не залежить від стану інших елементів. Знайти ймовірність відмови на протязі доби:

- а) тільки двох елементів;
- б) не менше двох елементів.

4. Компанія по перевезенню вантажів на протязі місяця виконує 400 рейсів. Ймовірність повного комерційного завантаження рейса дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що на протязі місяця з повним комерційним завантаженням буде виконано:

- а) не менше 300 рейсів;
- б) більшість рейсів.

5. Якість виробу перевіряють незалежно один від одного 4 контролери. Ймовірність прийому виробу кожним контролером дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що виріб буде прийнято:

- а) всіма контролерами;
- б) хоча б одним контролером;
- в) хоча б двома контролерами.

6. Згідно з статистичними даними в середньому 1% пасажирів здає квиток на поїзд. Знайти ймовірність того, що з 300 пасажирів, що придбали квитки на поїзд, здадуть квиток:

- а) не більше 5 пасажирів;
- б) не менше 3 пасажирів.

7. Відділ технічного контролю приймає в середньому 90% продукції заводу. Скільки потрібно виготовити виробів, щоб з ймовірністю 0,95 можна було очікувати, що не менше 200 буде прийнято відділом технічного контролю?

8. Згідно з статистичними даними в середньому 5% авіарейсів затримується по технічним причинам. Знайти ймовірність того, що з 400 рейсів, запланованих на наступний місяць, по технічним причинам буде затримано:

- а) не більше 3% рейсів;
- б) не менше 10% рейсів.

9. Велика партія ламп містить 1% браку.

1) Знайти ймовірність того, що серед вибраних випадковим чином 8 ламп виявиться хоча б одна бракована.

2) Яку кількість ламп потрібно відібрати з партії, щоб ймовірність того, що серед них буде хоча б одна бракована, була не менше 0,95.

10. Ймовірність того, що студент дасть правильну відповідь на кожне з екзаменаційних питань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з чотирьох питань студент дасть правильну відповідь на:

- а) хоча б одне питання;
- б) два питання;
- в) не менше трьох питань.

11. Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Ймовірність того, що деякий абонент зателефонує на станцію на протязі години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що на протязі години на телефонну станцію зателефонує:

- а) 5 абонентів;
- б) не більше трьох абонентів.

12. В осінньо-зимовий період регулярність авіарейсів становить 90%. Яку кількість рейсів потрібно запланувати на цей період, щоб з ймовірністю 0,96 виконати не менше 1500 рейсів?

13. Фабрика виготовляє 75% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що з 300 виробів, виготовлених на фабриці, кількість першосортних буде:

- а) не менше 250;
- б) від 220 до 235;
- в) не більше 200.

14. Автопарк маршрутних таксі має 12 автомобілів одного типу. Ймовірність готовності кожного автомобіля до рейса дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку на найближчий день, якщо для цього необхідно мати готовими до рейсу:

- а) 8 автомобілів;
- б) не менше 8 автомобілів.

15. Ймовірність закриття аеропорту на добу у зв'язку з метеоумовами в осінньо-зимовий період дорівнює 0,15. Знайти ймовірність того, що в цей період аеропорт буде закрито:

- а) на 30 діб;
- б) не більше ніж на 20 діб;
- в) не менше, ніж на 50 діб.

16. Згідно з статистичними даними 30% бракованого товару надходить в магазин з вини служби перевезень. На протязі тижня з різних причин до магазину надійшло 12 партій товару, які було визнано бракованими. Знайти найбільш ймовірне число партій товару, які виявились бракованими з вини служби перевезень.

17. Прилад складається з 4 незалежно працюючих елементів. Ймовірність безвідмовної роботи кожного елемента на протязі часу t дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що за час t будуть безвідмовно працювати:

- а) всі елементи;
- б) хоча б один елемент;
- в) не менше трьох елементів.

18. При транспортування пошкоджується в середньому 0,05% скляних виробів. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні 1000 виробів буде пошкоджено:

- а) рівно 3 вироби;
- б) не більше трьох виробів;
- в) хоча б один виріб.

19. З комплекту, що складається з 9 якісних і 1 бракованого виробу, випадковим чином по одному вибирають вироби, кожен з яких після перевірки якості повертається в комплект.

1) Знайти ймовірність того, що при 10 перевірках бракований виріб буде виявлено хоча б один раз;

2) Скільки раз потрібно вибирати вироби на перевірку, щоб з ймовірністю, не меншою 0,9, бракований виріб було виявлено хоча б один раз.

20. За даними аеропорту в листопаді в зв'язку з метеоумовами відкладається 10% рейсів. Знайти ймовірність того, що з 400 рейсів, запланованих на цей місяць, буде відкладено:

- а) 50 рейсів;
- б) від 30 до 50 рейсів;
- в) не більше 30 рейсів.

21. Згідно з статистичними даними 90% студентів II курсу приходять на пари без запізнення.

1) Знайти ймовірність того, що з 169 студентів не менше 150 прийде на пару без запізнення.

2) Скільки студентів має прийняти участь в експерименті, щоб з ймовірністю 0,9 можна було очікувати, що прийде без запізнення не менше 150 студентів?

22. Фабрика виготовляє в середньому 20% нестандартних виробів.

1) Знайти ймовірність того, що кількість нестандартних виробів в партії з 100 виробів виявиться більше 2.

2) Скільки потрібно взяти виробів, щоб з ймовірністю 0,9 можна було очікувати появи хоча б одного нестандартного виробу?

23. Радіостанція передає 6 повідомлень для екіпажу пароплава. Ймовірність прийому кожного повідомлення 0,6.

1) Знайти найбільш ймовірну кількість прийнятих повідомлень.

2) Знайти ймовірність того, що буде прийнято не менше 4 повідомлень.

24. Ймовірність того, що студент запізниться на пару, дорівнює 0,04. Знайти ймовірність того, що з 50 студентів запізниться:

- 1) четверо;
- 2) не більше 4;
- 3) хоча б один.

25. В зону аеродрому входять 6 літаків. Ймовірність правильного (такого, що не потребує втручання диспетчера) заходу на посадку кожного літака дорівнює 0,85. Знайти найбільш ймовірне число літаків, для яких буде необхідна допомога диспетчера, та обчислити цю найбільшу ймовірність.

26. Завод відправив на базу 500 якісних виробів. Ймовірність пошкодження при транспортуванні кожного виробу дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що буде пошкоджено:

- 1) 3 вироби;
- 2) менше трьох виробів;
- 3) хоча б один виріб.

27. На контроль поступає партія виробів. Відомо, що 5% всіх виробів не задовольняють стандарту.

1) Знайти найбільш ймовірну кількість нестандартних виробів серед 6 перевірених та обчислити цю найбільшу ймовірність.

2) Скільки необхідно перевірити виробів, щоб з ймовірністю не меншою 0,95, виявити хоча б один нестандартний?

28. Ймовірність того, що лампа залишиться в робочому стані після t годин роботи, дорівнює 0,1.

1) Знайти найбільш ймовірну кількість ламп з 5 досліджуваних, які не вийдуть з ладу після t годин роботи.

2) Яку кількість ламп потрібно замовити, щоб з ймовірністю, не меншою 0,95, хоча б одна з них залишилась в робочому стані.

29. Ймовірність того, що відвідувач універмагу зробить покупку, в середньому дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що з 100 відвідувачів зроблять покупки:

- 1) 60 чоловік;
- 2) не більше 70 чоловік;
- 3) не менше 60 чоловік.

30. За даними метеослужби, у IV кварталі кількість днів, в які спостерігаються снігопади, становить 17%. Знайти ймовірність того, що в цьому році в IV кварталі снігопади будуть спостерігатись на протязі:

- 1) 15 днів;
- 2) від 10 до 20 днів;
- 3) не більше 15 днів.

6. Ряд розподілу, функція розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини

1. Комплект складається з 5 деталей I сорту, 2 — II сорту і 3 бракованих. Випадковим чином вибирається одночасно 3 деталі. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості бракованих деталей серед відібраних. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

2. Система складається з 3 незалежно працюючих пристроїв, які за час t виходять з ладу з ймовірностями відповідно 0,1, 0,05 і 0,2. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості пристроїв, що вийшли з ладу за час t . Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

3. Ймовірність відмови при зверненні пасажир до каси дорівнює 0,1. Пасажир звертається в касу до отримання білету, але не більше 4 разів. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості звернень пасажир до каси. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

4. Ймовірність запізнення студента на першу пару дорівнює 0,2. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості запізнень студента на протязі 4 днів. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

5. Ймовірність того, що студент знає I питання білета дорівнює 0,9, II питання — 0,8, III питання — 0,7. В білеті 3 питання. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості питань білету, які знає студент. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

6. Партія виробів містить 20% нестандартних, причому 50% нестандартних виробів є браком. Випадковим чином з партії відбирають 3 вироби. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості бракованих деталей серед відібраних. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

7. Ймовірність того, що студент дасть парвильну відповідь на запитання викладача дорівнює 0,8. Викладач задає питання до першої неправильної відповіді, але не більше 4. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості правильних відповідей. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

8. Комплект складається з 5 виробів вартістю 40 грн. і 6 виробів вартістю 30 грн. Випадковим чином з комплекту відбирається одночасно 3 вироби. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — сумарна вартість відібраних виробів. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

9. Підприємство 30% вантажів перевозить на власному автотранспорті. Випадковим чином перевіряються 4 рейси. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості рейсів серед відібраних, здійснених на власному транспорті. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

10. Якість виробу перевіряється трьома контролерами. Ймовірності прийому першим, другим і третім контролерами відповідно рівні 0,95; 0,9 і 0,8. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості контролерів, що прийняли виріб. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

11. В партії з 20 виробів 90% вищої якості. Випадковим чином з партії одночасно відібрано 3 вироби. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості виробів вищої якості серед відібраних. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

12. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Стрілець робить 4 постріли. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості попадань в мішень. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

13. Аеропорт здійснює 3 рейси в пункт N . Ймовірність затримки першого, другого і третього рейсів відповідно рівні 0,1; 0,3 і 0,5. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості затриманих рейсів. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

14. Брак в продукції цеха становить 5%. Контролер випадковим чином вибирає по 1 виробу до виявлення першого бракованого, але не більше 4. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості бракованих деталей серед відібраних. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

15. За даними спостережень кількість перехожих, що переходять вулицю на червоне світло становить 15%. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості перехожих, що перейдуть дорогу на червоне світло серед 4 випадково відібраних людей. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

16. З партії, що містить 6 виробів I сорту, 5 виробів II сорту та 4 браковані вироби, випадковим чином відібрали 3 вироби. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості небракованих деталей серед відібраних. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

17. Випадковим чином вибирається натуральне число, що не перевищує 20. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості дільників цього числа. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

18. В ящику знаходиться 5 виробів, один з яких бракований. З ящика один за одним виймаються всі вироби до появи бракованого. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості виробів, що будуть вийняті. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

19. При підльоті до аеродрому літак має запас пального на три заходи на посадку. Ймовірність вдалої посадки при першому заході дорівнює 0,8, при другому — 0,9, при третьому — 0,95. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості заходів на посадку. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

20. Робітник обслуговує 4 верстати. Ймовірність того, що на протязі години верстат не потребуватиме налагодження, дорівнює для I верстату 0,7, для другого — 0,75, для третього — 0,8, для четвертого — 0,9. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості верстатів, які не потребуватимуть налагодження на протязі години. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

21. На шляху руху автомобіля 6 світлофорів, кожен з яких дозволяє або забороняє рух з ймовірністю 0,5. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості світлофорів, пройдених автомобілем до першої зупинки. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

22. Ймовірність виготовлення нестандартного виробу дорівнює 0,1. З партії виробів контролер бере деталь і перевіряє її на стандартність. Якщо виріб нестандартний, то перевірка припиняється, а партія затримується. Якщо ж деталь стандартна, то вибирається наступна, але не більше 5. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості перевірених стандартних деталей. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

23. Робітник працює з 4 приладами. Ймовірність того, що на протязі доби один з приладів вийде з ладу дорівнює 0,2. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості приладів, що вийшли з ладу на протязі доби. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

24. Комплект складається з 5 виробів вартістю 20 грн., та 5 виробів вартістю 50 грн. Випадковим чином вибирається 3 виробу. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — сумарної вартості відібраних виробів. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

25. Прилад складається з 4 незалежно працюючих елементів. Ймовірність того, що один з елементів не вийде з ладу дорівнює 0,75. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості елементів, що не вийшли з ладу. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

26. Випадковим чином вибирають натуральне число не більше 30. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості парних дільників цього числа. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

27. Є 10 лотерейних білетів, 3 з яких виграшні. Випадковим чином вибирається 3 білети. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості виграшних білетів серед відібраних. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

28. Ймовірність складання екзамену студентом з першого разу дорівнює 0,6, з другого — 0,75, з третього — 0,8. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості спроб скласти екзамен. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

29. При проходженні бойових навчань групі розвідників потрібно пройти 5 районів, в кожному з яких з ймовірністю 0,5 може відбутися сутичка з супротивником. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості районів, пройдених групою до першої сутички. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

30. Ймовірність відповісти на одне питання білету становить 0,9. В білеті 4 питання. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — кількості питань білету, на які студент дасть відповідь. Знайти числові характеристики випадкової величини. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

7. Функція розподілу, щільність розподілу, числові характеристики неперервної випадкової величини

Завдання 7 (а). Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти:

- 1) щільність розподілу $f(x)$;
- 2) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;
- 3) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

$$(1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ 0,5(x^2 - x), & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

$$(2) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 2 \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$$(3) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ 0,25(x^2 + x - 2), & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

$$(4) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 0,5(x^3 + x^2), & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$$(5) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$(6) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x\sqrt[3]{x}, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$$(7) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 3x^2 + 2x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$(8) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

$$(9) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ 0,25(x-1)^2, & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

$$(10) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{1}{3}(x^2 + 4x + 3), & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$(11) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{1}{15}(x^2 - 4x), & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

$$(12) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 0,5\sqrt{x}, & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

$$(13) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \ln x, & \text{при } 1 < x \leq e, \\ 1, & \text{при } x > e; \end{cases}$$

$$(14) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{1}{8}(x+1)^3, & \text{при } -1 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$$(15) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 + 1,5x, & \text{при } 0 < x \leq 0,5, \\ 1, & \text{при } x > 0,5; \end{cases}$$

$$(16) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$(17) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \sqrt[4]{x}, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$$(18) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{1}{9}(x^3 + 1), & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

$$(19) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{1}{3}(-x^2 + 2x + 3), & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

$$(20) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{8}x\sqrt{x}, & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

$$(21) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{3}(x^2 - 1), & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

$$(22) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(-x^2 + 5x - 4), & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

$$(23) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}(x^3 + x), & \text{при } 1 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$$(24) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x\sqrt[3]{x^2}, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$$(25) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{1}{3}(x^2 - 2x), & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} ;$$

$$(26) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ (x^2 - 1)^2, & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0; \end{cases} ;$$

$$(27) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 0,5\sqrt[3]{x}, & \text{при } 0 < x \leq 8, \\ 1, & \text{при } x > 8; \end{cases} ;$$

$$(28) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ (x - 2)^3, & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3; \end{cases} ;$$

$$(29) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{7}(x^3 - 1), & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2; \end{cases} ;$$

$$(30) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ 0,2(x^2 - 4), & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Завдання 7 (б). Дана щільність розподілу неперервної випадкової величини X .
Знайти:

- 1) коефіцієнт a ;
- 2) функцію розподілу $F(x)$.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ a \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ a(x^2 + 2x - 3), & \text{при } -1 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4, \\ ax\sqrt{x}, & \text{при } 4 < x \leq 9, \\ 0, & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ ax^2 + 2x, & \text{при } -2 < x \leq 0, \\ 0, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ a \ln x, & \text{при } 1 < x \leq e, \\ 0, & \text{при } x > e. \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ a2^x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$(7) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -10, \\ a(x^2 + 2x + 1), & \text{при } -10 < x \leq -5, \\ 0, & \text{при } x > -5. \end{cases}$$

$$(8) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ ae^x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$(9) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ a(x^3 - x^2), & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$(10) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{a}{\cos^2 x}, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$(11) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ a \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$(12) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ a(x^2 + 2x - 3), & \text{при } -1 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$(13) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4, \\ ax\sqrt{x}, & \text{при } 4 < x \leq 9, \\ 0, & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

$$(14) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ ax^2 + 2x, & \text{при } -2 < x \leq 0, \\ 0, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$$(15) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ a \ln x, & \text{при } 1 < x \leq e, \\ 0, & \text{при } x > e. \end{cases}$$

$$(16) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ a2^x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$(17) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -10, \\ a(x^2 + 2x + 1), & \text{при } -10 < x \leq -5, \\ 0, & \text{при } x > -5. \end{cases}$$

$$(18) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ ae^x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$(19) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ a(x^3 - x^2), & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$(20) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{a}{\cos^2 x}, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

- $$\begin{aligned}
(21) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ a \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \\
(22) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ a(x^2 + 2x - 3), & \text{при } -1 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases} \\
(23) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4, \\ ax\sqrt{x}, & \text{при } 4 < x \leq 9, \\ 0, & \text{при } x > 9. \end{cases} \\
(24) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ ax^2 + 2x, & \text{при } -2 < x \leq 0, \\ 0, & \text{при } x > 0. \end{cases} \\
(25) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ a \ln x, & \text{при } 1 < x \leq e, \\ 0, & \text{при } x > e. \end{cases} \\
(26) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ a2^x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases} \\
(27) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -10, \\ a(x^2 + 2x + 1), & \text{при } -10 < x \leq -5, \\ 0, & \text{при } x > -5. \end{cases} \\
(28) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ ae^x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases} \\
(29) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ a(x^3 - x^2), & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases} \\
(30) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{a}{\cos^2 x}, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

8. Нормальний закон розподілу

11. Підприємство виготовляє вироби, довжина яких X розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), яке дорівнює 50 см. Фактична довжина приймає значення від 45 до 55 см. Знайти ймовірність того, що довжина випадковим чином вибраного виробу буде: а) більше 52 см; б) менше 48 см.

2. Нормально розподілена випадкова величина в 15% випадків приймає значення, менше 12 і в 40% випадків — значення, більше 16,2. Знайти параметри a (математичне сподівання) і σ (середнє квадратичне відхилення) цього розподілу.

3. Хлібзавод випікає батони номінальною масою 1 кг. За статистичними даними 99,9% всієї продукції має масу від 0,96 до 1,04 кг. Знайти ймовірність того, що взятий на контроль батон відповідає стандарту, якщо для цього його маса не повинна відхилятися від номінальної більше, ніж на 0,02 кг.

4. Вимірюються значення випадкової величини X , яка має нормальний розподіл з параметрами $a = 10$, $\sigma = 5$. Знайти симетричний відносно a інтервал, в який з ймовірністю 0,5 попадає виміряне значення.

5. Деталь, що виготовляється автоматом, вважається якісною, якщо відхилення контрольованого розміру X від стандарту (математичного сподівання) не перевищує 10 мм. Точність виготовлення визначається стандартним відхиленням σ . Для прийнятої технології $\sigma = 5$ і X має нормальний розподіл. Скільки процентів якісних деталей виготовляє автомат? Якою має бути точність виготовлення, щоб цей процент підвищився до 98?

6. Похибка утримання висоти літаком має стандартне відхилення $\sigma = 75$ м. Для польоту літаку відведено коридор висотою 100 м. Знайти ймовірність того, що літак буде летіти нижче, всередині або вище коридора, якщо йому задана висота, що відповідає середині коридора.

7. Випадкова похибка вимірювання фізичної величини має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 0$, $\sigma = 20$. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірювань похибка хоча б одного не перевищить по абсолютній величині 4.

8. Коробки з шоколадом пакуються автоматично, їх середня маса дорівнює 1,06 кг. Знайти стандартне відхилення σ , якщо 5% коробок мають масу, меншу 1 кг.

9. Виріб вважається першосортним, якщо відхилення його розміру від номіналу по абсолютній величині не перевищує 4,2 мм. Відхилення розміру — випадкова величина X , що має нормальний розподіл з параметром $\sigma = 3$ мм. Знайти середнє число першосортних виробів серед шести виготовлених.

10. Нормально розподілена випадкова величина X в 10% випробувань приймає значення менші 5, а в 20% випробувань — значення, більші 30. Знайти ймовірність попадання цієї випадкової величини в інтервал $(10; 20)$.

11. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 1,6$ і $\sigma = 1$. Знайти ймовірність того, що при чотирьох випробуваннях ця випадкова величина хоча б один раз попаде в інтервал $(1, 5; 2)$.

12. Розмір виробу, що виготовляється — випадкова величина X , що має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 5$ см і $\sigma = 0,9$ см.

1) Знайти ймовірність того, що розмір взятого навмання виробу відрізняється від стандарту (математичного сподівання) не більше, ніж на 0,2 см.

2) В яких межах з ймовірністю 0,95 змінюється розмір вибраного навмання виробу?

13. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 2,2$ і $\sigma = 0,5$. Знайти ймовірність того, що в першому випробуванні X прийме значення з інтервалу $(3; 4)$, а в другому — з інтервалу $(1; 2)$.

14. Підприємство випускає вироби номінальної маси 1 кг. Відомо, що 5% продукції має масу менше 0,94 кг. Знайти ймовірність того, що з чотирьох вибраних випадковим чином виробів рівно 2 будуть мати масу, більшу 1,05 кг.

15. Підприємство виготовляє вироби, довжина яких X є випадковою величиною, що має нормальний розподіл з проектним (середнім) значенням 80 см. Фактична довжина знаходиться в межах від 75 до 85 см. Знайти ймовірність того, що довжина взятого навмання виробу матиме значення від 78 до 83 см.

16. Процент зайнятості крісел на рейсах авіакомпанії — випадкова величина X , розподілена за нормальним законом з середнім значенням 90% і стандартним відхиленням 5%. Знайти ймовірність того, що

1) на випадковим чином вибраному рейсі процент зайнятості крісел відхилиться від середнього значення по абсолютній величині не більше, ніж на 2%;

2) процент зайнятості крісел на цьому рейсі буде знаходитись в межах від 85 до 91%.

17. Швидкість вітру в деякому районі — нормально розподілена випадкова величина X з середнім значенням 16 км/ч і стандартним відхиленням 5 км/ч. Знайти ймовірність того, що в випадковий момент часу швидкість вітру буде: а) менше 14 км/ч; б) більше 20 км/ч.

18. Річний прибуток фірми — нормально розподілена випадкова величина X з середнім значенням 2,5 млн. грн. і стандартним відхиленням 0,45 млн. Знайти симетричний відносно середнього значення інтервал, в якому з ймовірністю 0,9 можна очікувати прибуток в наступному році.

19. Процент продажу певної групи товару в магазині — нормально розподілена випадкова величина X з середнім значенням 75% і стандартним відхиленням 5%. Знайти ймовірність того, що з партії товару 250 од. буде продано не менше 200 од.

20. Маса виробів, що виготовляються автоматом — нормально розподілена випадкова величина з середнім значенням 90 г і дисперсією 0,0225. Знайти ймовірність того, що

1) відхилення маси виробу від середнього значення не перевищить по абсолютній величині 0,4 г;

2) маса виготовленого виробу буде не більше 91 г.

21. Підприємство виготовляє вироби, довжина яких X розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), яке дорівнює 50 см. Фактична довжина приймає значення від 45 до 55 см. Знайти ймовірність того, що довжина випадковим чином вибраного виробу буде: а) більше 52 см; б) менше 48 см.

22. Нормально розподілена випадкова величина в 15% випадків приймає значення, менше 12 і в 40% випадків — значення, більше 16,2. Знайти параметри a (математичне сподівання) і σ (середнє квадратичне відхилення) цього розподілу.

23. Хлібзавод випікає батони номінальною масою 1 кг. За статистичними даними 99,9% всієї продукції має масу від 0,96 до 1,04 кг. Знайти ймовірність того, що взятий на контроль батон відповідає стандарту, якщо для цього його маса не повинна відхилятися від номінальної більше, ніж на 0,02 кг.

24. Вимірюються значення випадкової величини X , яка має нормальний розподіл з параметрами $a = 10$, $\sigma = 5$. Знайти симетричний відносно a інтервал, в який з ймовірністю 0,5 попадає вимірне значення.

25. Деталь, що виготовляється автоматом, вважається якісною, якщо відхилення контрольованого розміру X від стандарту (математичного сподівання) не перевищує 10 мм. Точність виготовлення визначається стандартним відхиленням σ . Для прийнятої технології $\sigma = 5$ і X має нормальний розподіл. Скільки процентів якісних деталей виготовляє автомат? Якою має бути точність виготовлення, щоб цей процент підвищився до 98?

26. Похибка утримання висоти літаком дорівнює має стандартне відхилення $\sigma = 75$ м. Для польоту літаку відведено коридор висотою 100 м. Знайти ймовірність того, що літак буде летіти нижче, всередині або вище коридора, якщо йому задана висота, що відповідає середині коридора.

27. Випадкова похибка вимірювання фізичної величини має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 0$, $\sigma = 20$. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірювань похибка хоча б одного не перевищить по абсолютній величині 4.

28. Коробки з шоколадом пакуються автоматично, їх середня маса дорівнює 1,06 кг. Знайти стандартне відхилення σ , якщо 5% коробок мають масу, меншу 1 кг.

29. Виріб вважається першосортним, якщо відхилення його розміру від номіналу по абсолютній величині не перевищує 4,2 мм. Відхилення розміру — випадкова величина X , що має нормальний розподіл з параметром $\sigma = 3$ мм. Знайти середнє число першосортних виробів серед шести виготовлених.

30. Нормально розподілена випадкова величина X в 10% випробувань приймає значення, менші 5, а в 20% випробувань — значення, більші 30. Знайти ймовірність попадання цієї випадкової величини в інтервал $(10; 20)$.

9. Система двох дискретних випадкових величин

1. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	1	6	11	16
1	0,068	0,082	0,138	0,042
3	0,062	0,108	0,052	0,078
5	0,098	0,012	0,158	0,102

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 6$ і $Y|X = 5$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 6)$ і $M(Y|X = 5)$.

2. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	2	7	12	17
2	0,066	0,084	0,136	0,044
4	0,064	0,106	0,054	0,076
6	0,096	0,014	0,156	0,104

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 12$ і $Y|X = 12$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 12)$ і $M(Y|X = 2)$.

3. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	12	17	22	27
12	0,046	0,104	0,116	0,064
14	0,084	0,086	0,074	0,056
16	0,076	0,034	0,136	0,124

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 12$ і $Y|X = 14$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 12)$ і $M(Y|X = 14)$.

4. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	3	8	13	18
3	0,064	0,086	0,134	0,046
5	0,066	0,104	0,056	0,074
7	0,094	0,016	0,154	0,106

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .

- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 18$ і $Y|X = 7$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 18)$ і $M(Y|X = 7)$.

5. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	12	17	22	27
12	0,046	0,104	0,116	0,064
14	0,084	0,086	0,074	0,056
16	0,076	0,034	0,136	0,124

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 22$ і $Y|X = 12$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 22)$ і $M(Y|X = 12)$.

6. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	13	18	23	28
13	0,044	0,106	0,114	0,066
15	0,086	0,084	0,076	0,054
17	0,074	0,036	0,134	0,126

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 13$ і $Y|X = 15$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 13)$ і $M(Y|X = 15)$.

7. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	4	9	14	19
4	0,062	0,088	0,132	0,048
6	0,068	0,102	0,058	0,072
8	0,092	0,018	0,152	0,108

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 19$ і $Y|X = 6$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 19)$ і $M(Y|X = 6)$.

8. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	14	19	24	29
14	0,042	0,106	0,112	0,068
16	0,088	0,082	0,078	0,052
18	0,072	0,038	0,132	0,128

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 14$ і $Y|X = 18$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 14)$ і $M(Y|X = 18)$.

9. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	5	10	15	20
5	0,06	0,09	0,13	0,05
7	0,07	0,1	0,06	0,07
9	0,09	0,02	0,15	0,11

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 5$ і $Y|X = 9$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 5)$ і $M(Y|X = 9)$.

10. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	15	20	25	30
15	0,04	0,11	0,11	0,07
17	0,09	0,08	0,08	0,05
19	0,07	0,04	0,13	0,13

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 20$ і $Y|X = 17$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 20)$ і $M(Y|X = 17)$.

11. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	-2	3	8	13
-2	0,074	0,076	0,144	0,036
0	0,056	0,114	0,046	0,084
2	0,104	0,006	0,164	0,096

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = -2$ і $Y|X = 0$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = -2)$ і $M(Y|X = 0)$.

12. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	6	11	16	21
6	0,058	0,092	0,128	0,052
8	0,072	0,098	0,062	0,068
10	0,088	0,022	0,148	0,112

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 21$ і $Y|X = 8$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 21)$ і $M(Y|X = 8)$.

13. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	16	21	26	31
16	0,038	0,112	0,108	0,072
18	0,092	0,078	0,082	0,048
20	0,068	0,042	0,128	0,132

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 26$ і $Y|X = 16$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 26)$ і $M(Y|X = 16)$.

14. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	7	12	17	22
7	0,056	0,094	0,126	0,054
9	0,074	0,096	0,064	0,066
11	0,086	0,024	0,146	0,114

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 7$ і $Y|X = 9$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 7)$ і $M(Y|X = 9)$.

15. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	17	22	27	32
17	0,036	0,114	0,106	0,074
19	0,094	0,076	0,084	0,046
21	0,066	0,044	0,126	0,134

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 22$ і $Y|X = 21$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 22)$ і $M(Y|X = 21)$.

16. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	8	13	18	23
8	0,054	0,096	0,124	0,056
10	0,076	0,094	0,066	0,064
12	0,084	0,026	0,144	0,116

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 13$ і $Y|X = 8$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 13)$ і $M(Y|X = 8)$.

17. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	-1	4	9	14
-1	0,072	0,078	0,142	0,038
1	0,058	0,112	0,048	0,082
3	0,102	0,008	0,162	0,098

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 4$ і $Y|X = -1$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 4)$ і $M(Y|X = -1)$.

18. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	9	14	19	24
9	0,052	0,098	0,122	0,058
11	0,078	0,092	0,068	0,062
13	0,082	0,028	0,142	0,118

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 24$ і $Y|X = 9$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 24)$ і $M(Y|X = 9)$.

19. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	18	23	28	33
18	0,034	0,116	0,104	0,076
20	0,096	0,074	0,086	0,044
22	0,064	0,046	0,124	0,136

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 33$ і $Y|X = 18$.

4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 33)$ і $M(Y|X = 18)$.

20. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	10	15	20	25
10	0,05	0,1	0,12	0,06
12	0,08	0,09	0,07	0,06
14	0,08	0,03	0,14	0,12

1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .

2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .

3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 10$ і $Y|X = 14$.

4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 10)$ і $M(Y|X = 14)$.

21. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	1	2	3	4
10	0,032	0,118	0,102	0,078
20	0,098	0,072	0,088	0,042
30	0,062	0,048	0,122	0,138

1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .

2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .

3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 1$ і $Y|X = 20$.

4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 1)$ і $M(Y|X = 20)$.

22. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	20	25	30	35
10	0,03	0,12	0,1	0,08
12	0,1	0,07	0,09	0,04
14	0,06	0,05	0,12	0,14

1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .

2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .

3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 20$ і $Y|X = 14$.

4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 20)$ і $M(Y|X = 14)$.

23. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	1	6	7	9
1	0,028	0,122	0,098	0,082
4	0,102	0,068	0,092	0,038
5	0,058	0,052	0,118	0,142

1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .

- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 7$ і $Y|X = 4$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 7)$ і $M(Y|X = 4)$.

24. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	10	11	12	13
-1	0,026	0,124	0,096	0,084
0	0,104	0,066	0,094	0,036
1	0,056	0,054	0,116	0,144

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 13$ і $Y|X = 0$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 13)$ і $M(Y|X = 0)$.

25. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	3	5	7	9
10	0,024	0,128	0,094	0,086
15	0,106	0,064	0,096	0,034
20	0,054	0,056	0,114	0,146

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 7$ і $Y|X = 10$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 7)$ і $M(Y|X = 10)$.

26. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	2	8	12	16
1	0,024	0,126	0,094	0,086
2	0,106	0,064	0,096	0,034
3	0,054	0,056	0,114	0,146

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 2$ і $Y|X = 3$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 2)$ і $M(Y|X = 3)$.

27. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	5	6	7	8
3	0,022	0,128	0,092	0,088
6	0,108	0,062	0,098	0,032
9	0,052	0,058	0,112	0,148

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 7$ і $Y|X = 3$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 7)$ і $M(Y|X = 3)$.

28. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	9	10	11	12
100	0,02	0,13	0,09	0,09
200	0,11	0,06	0,1	0,03
300	0,05	0,06	0,11	0,15

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 11$ і $Y|X = 100$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 11)$ і $M(Y|X = 100)$.

29. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	10	20	30	40
2	0,018	0,132	0,088	0,092
4	0,112	0,058	0,102	0,028
6	0,048	0,062	0,108	0,152

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 20$ і $Y|X = 2$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 20)$ і $M(Y|X = 2)$.

30. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	7	9	11	13
10	0,016	0,134	0,086	0,094
20	0,114	0,056	0,104	0,026
30	0,046	0,064	0,106	0,154

- 1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .
- 2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .
- 3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 7$ і $Y|X = 20$.
- 4) Обчисліть умовні математичні сподівання $M(X|Y = 7)$ і $M(Y|X = 20)$.

Завдання 10. З генеральної сукупності утворено вибірку. З рівнем значущості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності та побудувати довірчий інтервал для математичного сподівання генеральної сукупності.

1. $\alpha = 0,01$

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	2	3	8	12	9	4

2. $\alpha = 0,05$

x_i	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
n_i	10	25	113	87	50	7

3. $\alpha = 0,01$

x_i	10	20	30	40	50	60
n_i	1	5	7	6	4	3

4. $\alpha = 0,1$

x_i	-1	0	1	2	3	4
n_i	11	27	33	21	15	6

5. $\alpha = 0,01$

x_i	2	4	6	8	10	12
n_i	2	7	23	21	17	10

6. $\alpha = 0,05$

x_i	3	5	7	9	11	13
n_i	6	8	12	10	7	3

7. $\alpha = 0,1$

x_i	3	5	7	9	11	13
n_i	12	50	78	44	21	13

8. $\alpha = 0,01$

x_i	10	15	20	25	30	35
n_i	3	5	7	4	2	1

9. $\alpha = 0,05$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
n_i	15	20	24	25	17	10

10. $\alpha = 0,1$

x_i	0,5	1	1,5	2	2,5	3
n_i	22	54	67	60	42	33

11. $\alpha = 0,01$

x_i	10	20	30	40	50	60
n_i	2	3	8	12	9	4

12. $\alpha = 0,05$

x_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
n_i	10	25	113	87	50	7

13. $\alpha = 0,01$

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	5	7	6	4	3

14. $\alpha = 0,1$

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	11	27	33	21	15	6

15. $\alpha = 0,01$

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
n_i	2	7	23	21	17	10

16. $\alpha = 0,05$

x_i	3,5	5,5	7,5	9,5	11,5	13,5
n_i	6	8	12	10	7	3

17. $\alpha = 0,1$

x_i	13	15	17	19	21	23
n_i	12	50	78	44	21	13

18. $\alpha = 0,01$

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5
n_i	3	5	7	4	2	1

19. $\alpha = 0,05$

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	15	20	24	25	17	10

20. $\alpha = 0,1$

x_i	50	100	150	200	250	300
n_i	22	54	67	60	42	33

21. $\alpha = 0,01$

x_i	10	20	30	40	50	60
n_i	2	3	8	12	9	4

22. $\alpha = 0,05$

x_i	1	3	5	7	9	11
n_i	10	25	113	87	50	7

23. $\alpha = 0,01$

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	5	7	6	4	3

24. $\alpha = 0,1$

x_i	0	5	10	15	20	25
n_i	11	27	33	21	15	6

25. $\alpha = 0,01$

x_i	20	40	60	80	100	120
n_i	2	7	23	21	17	10

26. $\alpha = 0,05$

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3
n_i	6	8	12	10	7	3

27. $\alpha = 0,1$

x_i	13	15	17	19	21	23
n_i	12	50	78	44	21	13

28. $\alpha = 0,01$

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5
n_i	3	5	7	4	2	1

29. $\alpha = 0,05$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
n_i	15	20	24	25	17	10

30. $\alpha = 0,1$

x_i	5	10	15	20	25	30
n_i	22	54	67	60	42	33

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Елементи комбінаторики.

Класичне означення ймовірності випадкової події

Елементи комбінаторики.

Правило добутку. Якщо елемент x множини A можна вибрати n_1 способами і після цього елемент y цієї ж множини можна вибрати n_2 способами, то пару елементів (x, y) можна вибрати $n_1 \cdot n_2$ способами.

Розміщення.

Нехай A — множина, що складається з n елементів (n -елементна множина). Тоді будь-яка впорядкована підмножина множини A , що складається з k елементів (k -елементна підмножина) називається *розміщенням з повторенням з n елементів по k* .

Число розміщень з повтореннями з n елементів по k дорівнює:

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Нехай A — n -елементна множина. Тоді будь-яка впорядкована підмножина, що складається з k різних елементів множини A ($k \leq n$) називається *розміщенням без повторень з n елементів по k* .

Число розміщень без повторень з n елементів по k дорівнює:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Перестановки. *Перестановками з n елементів* називаються множини з n елементів, які відрізняються лише порядком елементів.

Кількість перестановок з n елементів без повторень дорівнює

$$P_n = n!.$$

Нехай $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ — n -елементна множина, причому елемент x_1 зустрічається k_1 раз, елемент x_2 — k_2 раз, ..., елемент x_m — k_m раз. Кількість перестановок з n елементів з повтореннями дорівнює

$$P_n = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

Комбінації (сполучення). Довільна k -елементна підмножина n -елементної множини називається *комбінацією (сполученням) з n елементів по k* .

Число комбінацій (сполучень) з n елементів по k дорівнює:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Розглянемо деяку множину Ω , елементи якої ω називатимемо *елементарними подіями*, а саму множину Ω — *простором елементарних подій*.

Розглянемо множину $\mathcal{B}$, яка складається з усіх можливих підмножин $A, B, \dots$ простору елементарних подій Ω . Підмножини $A, B, \dots$ називатимемо *подіями*.

Будемо вважати, що для елементів множини $\mathcal{B}$ виконуються дві наступні аксіоми:

I. Якщо множини $A_i \in \mathcal{B}$, $i \in N$, то $\bigcup_i A_i \in \mathcal{B}$.

II. Якщо множина $A \in \mathcal{B}$, то $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{B}$.

З аксіом I та II випливає, що:

- 1) $\Omega \in \mathcal{B}$,
- 2) $\emptyset \in \mathcal{B}$,
- 3) якщо $A_i \in \mathcal{B}$, $i \in N$, то $\bigcap_i A_i \in \mathcal{B}$.

Множина $\mathcal{B}$, яка задовольняє аксіоми I та II, називається *борелівською σ -алгеброю подій*.

Надалі операцію об'єднання подій будемо називати додаванням подій і позначати знаком "+", операцію перетину — множенням подій і позначати знаком "·", а операцію доповнення — переходом до протилежної події і позначатимемо $\overline{A}$. Крім того, подію Ω називатимемо *достовірною*, подію $\emptyset$ — *неможливою*.

Події A і B назовемо *несумісними*, якщо $A \cap B = \emptyset$

Розглянемо деяку функцію $P(A)$, $A \in \mathcal{B}$, яка задовольняє наступні аксіоми:

1. Кожній події A поставлено у відповідність невід'ємне число $P(A)$, яке називається *ймовірністю події A* .

2. Якщо події $A_1, A_2, \dots$ — попарно несумісні, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

(аксіома зчисленної адитивності).

3. $P(\Omega) = 1$.

Сукупність трьох об'єктів $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, в якій $\mathcal{B}$ задовольняє аксіоми I і II, а P є функцією, для якої мають місце аксіоми 1-3, називається *ймовірнісним простором*.

Класичне означення ймовірності: ймовірність випадкової події A визначається рівністю

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad (1.1)$$

де k — число елементарних подій, які в сумі дають подію A (число елементарних подій, що сприяють події A), n — загальна кількість елементарних подій.

Приклад 1.1. Для того, щоб зламати електронну поштову скриньку ФБР, хакеру Васі необхідно набрати пароль, який складається з 8 символів. Яка ймовірність того, що Вася вгадає пароль з першої спроби, якщо з добре інформованих джерел йому стало відомо, що пароль містить 4 цифри і 4 різні маленькі літери латинського алфавіту, причому цифри стоять на непарних, а літери — на парних місцях.

Розв'язання. Кількість способів, якими Вася може отримати впорядкований набір з 4 цифр (які, взагалі кажучи, можуть повторюватись) дорівнює числу розміщень з повтореннями з 10 елементів по 4:

$$\overline{A}_{10}^4 = 10^4.$$

Кількість способів, якими можна утворити впорядкований набір з 4 різних літер латинського алфавіту дорівнює числу розміщень без повторень з 26 елементів по 4:

$$A_{26}^4 = \frac{26!}{22!} = 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 = 358800.$$

Отже, за теоремою множення, кількість можливих варіантів дорівнює

$$n = 358800 \cdot 10^4 = 3588 \cdot 10^6.$$

Оскільки правильний варіант пароля тільки один, то в формулі (1.1) $k = 1$. Тому ймовірність події A , яка полягає в тому, що хакер Вася вгадає пароль, дорівнює

$$P(A) = \frac{1}{3588 \cdot 10^6} \approx 2,787 \cdot 10^{-10}.$$

Відповідь: $2,787 \cdot 10^{-10}$.

Приклад 1.2. Серед 11 лотерейних квитків 8 виграшних. Навмання взято 4 квитки. Обчислити ймовірність того, що серед них 3 виграшних.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що з 11 квитків вибирається 4, причому серед них 3 виграшних.

Елементарними наслідками експерименту є вибір довільних 4 квитків з 11. Кількість таких наслідків дорівнює кількості комбінацій з 11 по 4.

$$C_{11}^4 = \frac{11!}{4!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють події A , дорівнює

$$C_8^3 \cdot C_3^1 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{3!}{1!2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 = 84.$$

Тоді за класичним означенням ймовірності:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{84}{330} \approx 0,2545.$$

Відповідь: 0,2545.

Приклад 1.3. У ліфт 11-поверхового будинку сіли 4 пасажери. Кожний пасажир незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому (починаючи з другого) поверсі. Визначити ймовірність того, що: а) усі вийшли на різних поверхах; б) хоча б двоє вийшли на одному поверсі.

Розв'язання. Кількість елементарних подій, що є наслідками даного експерименту дорівнює кількості розміщень з 10 по 4 з повтореннями:

$$n = \overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000.$$

а) Нехай подія A полягає в тому, що всі пасажери вийшли на різних поверхах. Кількість елементарних подій, що сприяють появі події A , дорівнює кількості розміщень з 10 по 4 без повторень:

$$k = A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

Тоді за класичним означенням ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{5040}{10000} = 0,504.$$

б) Подія, яка полягає в тому, що хоча б двоє пасажирів вийшли на одному поверсі, є протилежною до події A . Тому її ймовірність

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0,504 = 0,496.$$

Відповідь: а) 0,504; б) 0,496.

Приклад 1.4. На тарілці лежить 15 зовні однакових пиріжків, 6 з яких з маком. На сніданок Вася з'їв 5 пиріжків. Знайти ймовірність того, що серед них було: а) 3 з маком; б) хоча б 3 з маком; в) жодного з маком; г) хоча б 1 з маком.

Розв'язання. а) Нехай подія A полягає в тому, що серед 5 пиріжків, які з'їв Вася на сніданок, було 3 з маком.

Кількість всіх можливих варіантів вибору 5 пиріжків з 15 дорівнює C_{15}^5 . Отже, в формулі (1.1) $n = C_{15}^5$.

Сприятливими для появи події A є випадки, коли 3 пиріжки Вася вибрав з 6 пиріжків з маком, а інші 2 — з $16 - 6 = 9$ пиріжків, що залишились. Вибрати 3 пиріжки з 6 можна C_6^3 способами, а 2 з 9 — C_9^2 способами. За правилом добутку число сприятливих випадків дорівнює $k = C_6^3 C_9^2$. Отже,

$$P(A) = \frac{C_6^3 C_9^2}{C_{15}^5} = \frac{\frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{9!}{2!7!}}{\frac{15!}{5!10!}} = \frac{\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2}}{\frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{240}{1001} \approx 0,2398.$$

б) Нехай подія B полягає в тому, що серед 5 пиріжків було хоча б 3 з маком. Подію B можна представити як суму подій

$$B = B_3 + B_4 + B_5,$$

де події B_3, B_4, B_5 полягають в тому, що серед 5 пиріжків була відповідно 3, 4 або 5 з маком. Зрозуміло, що $P(B_3) = P(A)$. Аналогічно обчислимо ймовірності подій B_4 і B_5 :

$$P(B_4) = \frac{C_6^4 C_9^1}{C_{15}^5} = \frac{\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{9!}{1!8!}}{\frac{15!}{5!10!}} = \frac{\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{9}{1}}{\frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{45}{1001} \approx 0,0450,$$

$$P(B_5) = \frac{C_6^5 C_9^0}{C_{15}^5} = \frac{\frac{6!}{5!1!} \cdot 1}{\frac{15!}{5!10!}} = \frac{6}{\frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{2}{1001} \approx 0,0020.$$

Оскільки події B_3, B_4, B_5 — несумісні, то

$$P(B) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{240}{1001} + \frac{45}{1001} + \frac{2}{1001} = \frac{287}{1001} \approx 0,2868.$$

в) Нехай подія C полягає в тому, що серед 5 пиріжків не було жодного з маком. Очевидно, що для події C кількість сприятливих випадків дорівнює $k = C_9^5$. Отже,

$$P(C) = \frac{C_9^5}{C_{15}^5} = \frac{\frac{9!}{5!4!}}{\frac{15!}{5!10!}} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{6}{143} \approx 0,0420.$$

г) Зрозуміло, що подія, яка полягає в тому, що серед 5 пиріжків був хоча б один з маком є протилежною до події C з попереднього пункту, а отже, її ймовірність можна обчислити за формулою ймовірності протилежної події:

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{6}{143} = \frac{137}{143} \approx 0,9580.$$

2. Геометричне означення ймовірності

При геометричному підході до обчислення ймовірності в якості простору елементарних подій Ω розглядається довільна множина скінченної міри Лебега на прямій, площині або в просторі. Подіями називають будь-які вимірні підмножини множини Ω . Ймовірність події A визначається за формулою:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

де $m(A)$ — міра Лебега множини A .

Приклад 2.1. На відрізок одиничної довжини навмання ставиться точка. Обчислити ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{1}{7}$.

Розв'язання. Простором елементарних подій даного експерименту можна вважати відрізок $[0; 1]$. Кожну елементарну подію (точку цього відрізка) будемо визначати її координатою x , $0 \leq x \leq 1$.

Нехай подія A полягає в тому, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{1}{7}$. Тоді елементарні події, що сприяють появі події A є точками інтервала $(\frac{1}{7}; 1 - \frac{1}{7}) = (\frac{1}{7}; \frac{6}{7})$.

Рис. 1. Крива 1 — осцилограма $\Delta H(\omega_2, t)$ при $\hbar\omega_2 = 1.72$ еВ і $I_1 = 10$ МВт·см⁻²; d, e, o, n, s, p, r — складові залежності 1.

Для обчислення ймовірності події A використаємо геометричне означення ймовірності:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{l(CD)}{l(AB)},$$

де $l(CD) = \frac{6}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$, $l(AB) = 1$ — довжини відрізків CD і AB . Тоді

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{7} \approx 0,7143.$$

Відповідь: $\frac{5}{7}$.

Приклад 2.2. Два пароплави повинні підійти до одного і того ж причалу. Час прибуття пароплавів рівноможливий протягом години. Знайти ймовірність того, що: а) одному з пароплавів доведеться чекати звільнення причалу; б) пароплавам не доведеться чекати, якщо час стоянки першого 10 хвилин, другого — 15 хвилин.

Розв'язання. Позначимо момент прибуття першого пароплаву x , другого — y . За умовою

$$0 \leq x \leq 60, \quad 0 \leq y \leq 60. \quad (1)$$

Простір елементарних подій складається з усіх можливих пар $(x; y)$, для яких виконуються нерівності (1). Поставимо кожній елементарній події y взаємно однозначну

відповідність точку координатної площини з координатами $(x; y)$. Тоді простір елементарних подій геометрично буде представлятись у вигляді квадрата $OBCD$ (див. мал.).

а) Нехай подія A полягає в тому, що одному з пароплавів доведеться чекати, тобто A буде мати місце при умові

$$\begin{cases} x - y < 15, \\ y - x < 10. \end{cases} \quad (2)$$

Побудуємо множину точок, що задовольняють умови (2). Для цього побудуємо прямі $l_1 : x - y = 10$ і $l_2 : y - x = 15$. Шуканою множиною точок буде шестигуник $EFGH$, з вершинами $E(0; 10)$, $F(50; 60)$, $G(60; 45)$, $H(15; 0)$. За геометричним означенням ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{ABCD} - S_{\triangle EBF} - S_{\triangle HDG}}{S_{ABCD}} = \frac{60^2 - \frac{1}{2} \cdot 50^2 - \frac{1}{2} \cdot 45^2}{60^2} = 0,3715.$$

б) Подія, яка полягає в тому, що пароплавам не доведеться чекати є протилежною до події A . Тому її ймовірність:

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0,3715 = 0,6285.$$

Відповідь: а) 0,3715; б) 0,6285.

Приклад 2.3. Вченому з світовим ім'ям Інокентій нічого було робити. Щоб якось згаяти вільний час, він вирішив провести науковий дослід: розпиляти ніжку стільця довжиною l см на 3 шматочки довільної довжини і спробувати скласти з них трикутник. Яка ймовірність того, що дослід відомого вченого завершиться успішно?

Розв'язання. Нехай x, y, z — довжини утворених шматочків. Тоді $x + y + z = l$, $x, y, z \in (0; l)$. Простором елементарних подій є множина:

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < l, 0 < y < l, 0 < z < l, x + y + z = l\}.$$

Якщо трійки чисел (x, y, z) розглядати як координати точок в деякій прямокутній декартовій системі координат, то множина точок Ω складатиме частину площини, обмежену сторонами трикутника ABC з вершинами в точках $A(l; 0; 0)$, $B(0; l; 0)$, $C(0; 0; l)$ (див. мал. 4.2).

З відрізків довжинами x, y, z можна утворити трикутник при умові:

$$\begin{cases} x + y > z, \\ x + z > y, \\ y + z > x. \end{cases} \quad (2.2)$$

Розглянемо відповідні рівності:

$$x + y = z, \quad x + z = y, \quad y + z = x,$$

кожна з яких визначає площину, яка перетинає площину (ABC) по прямим

$$a_1 : \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x + y + z - l = 0; \end{cases} \quad a_2 : \begin{cases} x + z - y = 0, \\ x + y + z - l = 0; \end{cases} \quad a_3 : \begin{cases} y + z - x = 0, \\ x + y + z - l = 0; \end{cases}$$

Точки перетину цих прямих мають координати:

$$a_1 \cap a_2 = K \left(0; \frac{l}{2}; \frac{l}{2} \right), \quad a_1 \cap a_3 = L \left(\frac{l}{2}; 0; \frac{l}{2} \right), \quad a_2 \cap a_3 = M \left(\frac{l}{2}; \frac{l}{2}; 0 \right).$$

Переконаємось, що точки площини (ABC) задовольняють системі нерівностей (2.2) тоді і тільки тоді, коли вони належать внутрішній частині трикутника KLM . Отже, ймовірність події A , яка полягає в тому, що з утворених шматочків ніжки стільця можна скласти трикутник, можна обчислити за формулою:

$$P(A) = \frac{S_{\Delta KLM}}{S_{\Delta ABC}}.$$

Трикутник ABC — правильний з стороною $AB = l\sqrt{2}$. Отже,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}l^2}{4} = \frac{\sqrt{3}l^2}{2}.$$

Аналогічно, трикутник KLM — правильний з стороною $KL = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ і його площа дорівнює $S_{\Delta KLM} = \frac{\sqrt{3}l^2}{8}$. Тоді

$$P(A) = \frac{\frac{\sqrt{3}l^2}{8}}{\frac{\sqrt{3}l^2}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь: 0,25.

3. Теореми додавання і множення ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей.

1) Якщо події A і B несумісні, то ймовірність їх суми дорівнює сумі ймовірностей:

$$\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

2) Якщо події A і B сумісні, то

$$\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB).$$

Наслідок (про ймовірність протилежної події). Ймовірність події $\bar{A}$ протилежної до A дорівнює

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Теорема множення ймовірностей.

1) Якщо події A і B незалежні, то

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

2) Якщо події A і B залежні, то

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A),$$

де $\mathbb{P}(B|A)$ — ймовірність події B при умові появи події A .

Приклад 3.1. Іван Царевич вступив у двобій з трьохголовим Змієм Гориничем. Ймовірність того, що Іван Царевич відрубає першу голову дорівнює 0,8, другу — 0,6 і третю — 0,5. Яка ймовірність того, що Іван Царевич: а) переможе Змія Горинича (відрубає всі голови); б) укладе мирну угоду (відрубає тільки 2 голови); в) попаде до Змія Горинича на обід (відрубає не більше 1 голови).

Розв'язання. Розглянемо елементарні події:

A_1 — "Іван Царевич відрубав Змію Гориничу першу голову";

A_2 — "Іван Царевич відрубав Змію Гориничу другу голову";

A_3 — "Іван Царевич відрубав Змію Гориничу третю голову".

За умовою

$$P(A_1) = 0,8, \quad P(A_2) = 0,6, \quad P(A_3) = 0,5.$$

Обчислимо ймовірності протилежних подій:

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,8 = 0,2, \quad P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,6 = 0,4,$$

$$P(\bar{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

а) Тоді подію B , яка полягає в тому, що Іван Царевич відрубав всі три голови, можна представити як добуток подій: $B = A_1A_2A_3$. Оскільки події A_1, A_2, A_3 незалежні, то

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,24.$$

б) Подію C , яка полягає в тому, що Іван Царевич відрубав Змію тільки 2 голови, можна представити як суму наступних подій:

$C_1 = A_1A_2\bar{A}_3$ — "відрубав першу і другу голови";

$C_2 = A_1 \bar{A}_2 A_3$ — "відрубав першу і третю голови";

$C_3 = \bar{A}_1 A_2 A_3$ — "відрубав другу і третю голови".

Оскільки події C_1 , C_2 і C_3 — несумісні, то

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \\ = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,46.$$

в) Подію D , яка полягає в тому, що Іван Царевич відрубав не більше однієї голови, можна представити у вигляді суми двох подій:

$D_1 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ — "не відрубав жодної голови" і

$D_2 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ — "відрубав тільки одну голову (третю, другу або першу)".

Тоді, оскільки події D_1 і D_2 — несумісні, то

$$P(D) = P(D_1) + P(D_2) = \\ = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,3.$$

Ймовірність події D можна було обчислити, використовуючи те, що D є подією, оберненою до суми подій B і C , які є несумісними. Отже,

$$P(D) = 1 - (P(B) + P(C)) = 1 - (0,24 + 0,46) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Приклад 3.2. Після того, як Іван Царевич поцілує Сплячу Красуню, вона може прокинутись з ймовірністю 0,6. Скільки раз Івану Царевичу доведеться поцілувати Сплячу Карсуню, щоб вона прокинулася з ймовірністю, не меншою 0,9.

Розв'язання. Будемо вважати, що Спляча Карсуня з ймовірністю 0,9 прокинеться після k -го поцілунку. Розглянемо події A_i , $i = 1, 2, \dots, k-1$, які полягають в тому, що Спляча Карсуня прокинеться після i -го поцілунку. Легко бачити, що

$$P(A_i) = (1 - 0,6)^{i-1} \cdot 0,6 = (0,4)^{i-1} \cdot 0,6.$$

За умовою задачі маємо

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) \geq 0,9, \\ 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 + \dots + (0,4)^{k-1} \cdot 0,6 \geq 0,9 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{0,6(1 - (0,4)^k)}{1 - 0,4} \geq 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad (0,4)^k \leq 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq \log_{0,4} 0,1 \approx 2,5.$$

Отже, Івану Царевичу доведеться цілувати Сплячу Красуню як мінімум 3 рази.

Приклад 3.3. Два гравці А та Б по черзі кидають монету. Виграє той, у кого раніше випаде "тризуб".

1) Знайти ймовірність того, що виграв А до 9-го кидка.

2) Яка ймовірність виграшу для кожного гравця при необмеженій за часом грі?

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли А кидає монету першим. Позначимо A_i події, які полягають в тому, що А виграв при i -му підкиданні монети, $i = 1, 3, 5, 7$.

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \mathbb{P}(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125; \\ \mathbb{P}(A_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,03125; \quad \mathbb{P}(A_7) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0,007813.$$

Ймовірність події A , яка полягає в тому, що A виграє до 9-го підкидання монети, дорівнює

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_5) + \mathbb{P}(A_7) = 0,5 + 0,125 + 0,03125 + 0,007813 = 0,664043.$$

Розглянемо тепер випадок, коли A кидає монету другим. Аналогічно позначимо A_i події, які полягають в тому, що A виграє при i -му підкиданні монети, $i = 2, 4, 6, 8$.

$$\mathbb{P}(A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,25; \quad \mathbb{P}(A_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625;$$

$$\mathbb{P}(A_6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0,015625; \quad \mathbb{P}(A_8) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0,00390625.$$

Ймовірність події A , яка полягає в тому, що A виграє до 9-го підкидання монети, в цьому випадку дорівнює

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_6) + \mathbb{P}(A_8) = 0,33203.$$

б) Розглянемо випадок, коли час гри необмежений. Тоді ймовірність того, що виграє гравець, який підкидає монету першим, дорівнює

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i-1} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ймовірність того, що виграє гравець, який підкидає монету другим, дорівнює

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Приклад 3.4. Урна містить M ($M = 10$) пронумерованих куль. Кулі виймаються по одній без повернення. Розглядаються такі події:

A — номери куль в порядку виймання утворюють послідовність $1, 2, 3, \dots, M$.

B — хоча б один раз співпадає номер кулі та порядковий номер виймання.

C — немає жодного співпаданню номера кулі та порядкового номера виймання.

Обчислити ймовірності подій A , B , C . Знайти граничні значення ймовірностей при $M \rightarrow \infty$.

Розв'язання. Загальна кількість елементарних подій, що можуть бути наслідками даного експерименту дорівнює кількості перестановок з 10 елементів $n = 10!$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі події A , дорівнює 1. Тоді за класичним означенням ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800} \approx 0,0000002756.$$

Позначимо $\mathbb{P}(k/n)$ — ймовірність рівно k співпадань при вийманні n кульок (це можлива, якщо k номери кульок співпадають, а $n - k$ — не співпадають). Кількість різних варіантів вибору k кульок з n довінює C_n^k . Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(k/n) &= C_n^k \cdot \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \mathbb{P}(0/n-k) = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \mathbb{P}(0/n-k) = \frac{1}{k!} \mathbb{P}(0/n-k).\end{aligned}\quad (3)$$

Очевидно, що сума ймовірностей по всім можливим кількостям співпадань при даному значенні n має дорівнювати 1, тобто

$$\mathbb{P}(0/n) + \mathbb{P}(1/n) + \dots + \mathbb{P}(n-1/n) + \mathbb{P}(n/n) = 1,$$

звідки, враховуючи (3), маємо:

$$\mathbb{P}(0/n) + \frac{1}{1!} \mathbb{P}(0/n-1) + \frac{1}{2!} \mathbb{P}(0/n-2) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \mathbb{P}(0/1) + \frac{1}{n!} = 1.$$

Очевидно, що $\mathbb{P}(0/1) = 0$. При $n = 2$

$$\mathbb{P}(0/2) + \frac{1}{1!} \mathbb{P}(0/1) + \frac{1}{2!} = 1, \quad \mathbb{P}(0/2) = \frac{1}{2}.$$

При $n = 3$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0/3) + \frac{1}{1!} \mathbb{P}(0/2) + \frac{1}{2!} \mathbb{P}(0/1) + \frac{1}{3!} &= 1, \\ \mathbb{P}(0/3) &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

При $n = 4$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0/4) + \frac{1}{1!} \mathbb{P}(0/3) + \frac{1}{2!} \mathbb{P}(0/2) + \frac{1}{3!} \mathbb{P}(0/1) + \frac{1}{4!} &= 1, \\ \mathbb{P}(0/4) &= \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Для того, щоб отримати загальну формулу обчислення $\mathbb{P}(0/n)$ розглянемо різниці:

$$\mathbb{P}(0/1) - \mathbb{P}(0/2) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2!},$$

$$\mathbb{P}(0/2) - \mathbb{P}(0/3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!},$$

$$\mathbb{P}(0/3) - \mathbb{P}(0/4) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12} = -\frac{1}{4!},$$

$$\mathbb{P}(0/4) - \mathbb{P}(0/5) = \frac{3}{8} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{40} = -\frac{1}{5!}.$$

Продовживши цей процес по індукції, отримаємо формулу:

$$\mathbb{P}(0/n-k) - \mathbb{P}(0/n-k-1) = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Додамо всі отримані нерівності:

$$\mathbb{P}(0/n-k) - \mathbb{P}(0/0) = -\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!},$$

звідки

$$\mathbb{P}(0/n-k) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}. \quad (4)$$

При $M = 10$ матимемо

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(0/10) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} \approx 0,367879464.$$

Подія B є протилежною до події C тому

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(C) = 1 - 0,367879464 = 0,632120536.$$

При $M \rightarrow \infty$ маємо $(n - k) \rightarrow \infty$ і в формулі (4) кількість доданків прямуватиме до нескінченності. Як відомо,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1},$$

тобто

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &\approx e^{-1} \approx 0,367879441, & (M \rightarrow \infty) \\ \mathbb{P}(B) &\approx 1 - e^{-1} \approx 0,632120559, & (M \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

4. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.

Якщо подія A може відбутися тільки з однією з n попарно несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(H_i) = 1$, (ці події називають гіпотезами по відношенню до A), то ймовірність події A можна обчислити за *формулою повної ймовірності*:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(H_i) \mathbb{P}(A|H_i).$$

Якщо відомо, що подія A вже відбулась, то можна обчислити умовні ймовірності $\mathbb{P}(H_i|A)$ за *формулами Байєса*:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Приклад 4.1. У магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому I завод поставляє 60% виробів, II і III — по 20%. Серед виробів I заводу 70% першосортних, II — 80%, III — 90%. Куплений один виріб. Він виявився першосортним. Яка ймовірність того, що цей виріб виготовлений третім заводом?

Розв'язання. Розглянемо подію A — куплений виріб виявився першосортним. Можливі наступні припущення (гіпотези):

H_1 — виріб надійшов до магазину з I заводу;

H_2 — виріб надійшов до магазину з II заводу;

H_3 — виріб надійшов до магазину з III заводу.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{60}{100} = 0,6; \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{20}{100} = 0,2; \quad \mathbb{P}(H_3) = \frac{20}{100} = 0,2.$$

Знайдемо умовні ймовірності того, що першосортний виріб виготовлений на I, II або III заводах відповідно:

$$\mathbb{P}(A|H_1) = \frac{70}{100} = 0,7; \quad \mathbb{P}(A|H_2) = \frac{80}{100} = 0,8; \quad \mathbb{P}(A|H_3) = \frac{90}{100} = 0,9.$$

Ймовірність події A обчислимо за формулою повної ймовірності:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) + \mathbb{P}(H_3)\mathbb{P}(A|H_3) = \\ &= 0,6 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,76.\end{aligned}$$

Ймовірність того, що куплений першосортний виріб виготовлений на III заводі обчислимо за формулою Байєса:

$$\mathbb{P}(H_3|A) = \frac{\mathbb{P}(H_3)\mathbb{P}(A|H_3)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,76} = 0,2368.$$

Відповідь: 0,2368.

Приклад 4.2. В першій урни 3 білі та 2 чорні кулі, у другій 4 білі та 4 чорні. З першої урни в другу перекладено 2 кулі, потім з другої урни вийнято одну кулю. Визначити ймовірність того, що вийнята куля біла.

Розв'язання. Нехай подія A — вийнята біла куля. Можливі наступні припущення (гіпотези):

H_1 — з першої урни перекладено в другу 2 білі кулі;

H_2 — з першої урни перекладено в другу 1 білу та 1 чорну кулю;

H_3 — з першої урни перекладено в другу 2 чорні кулі.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1) &= \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{8!}{2!6!}} = \frac{\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}}{\frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2}} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}, \\ \mathbb{P}(H_2) &= \frac{C_4^1 \cdot C_4^1}{C_8^2} = \frac{\frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{4!}{1!3!}}{\frac{8!}{2!6!}} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}, \\ \mathbb{P}(H_3) &= \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{8!}{2!6!}} = \frac{\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}}{\frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2}} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}.\end{aligned}$$

Обчислимо умовні ймовірності того, що з першої урни буде вийнята біла куля, якщо в неї було перекладено 2 білі, 1 біла і 1 чорна, 2 чорні кулі відповідно:

$$\mathbb{P}(A|H_1) = \frac{5}{7}, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = \frac{4}{7}, \quad \mathbb{P}(A|H_3) = \frac{3}{7}.$$

Ймовірність події A обчислимо за формулою повної ймовірності:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) + \mathbb{P}(H_3)\mathbb{P}(A|H_3) = \\ &= \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{14} \cdot \frac{3}{7} = \frac{56}{98} \approx 0,571429.\end{aligned}$$

Відповідь: 0,571429.

5. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі, теорема Муавра-Лапласа, формула Пуассона

У ймовірнісній схемі Бернуллі розглядається послідовність n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A може відбутися з постійною ймовірністю p . Ймовірність того, що подія A не відбудеться внаслідок одного випробування дорівнює $q = 1 - p$. Ймовірність того, що в n випробуваннях подія A відбудеться k раз обчислюється за *формулою Бернуллі*:

$$\mathbb{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

При великих значеннях n використовують наближені рівності (локальну та інтегральну формули Муавра-Лапласа та формулу Пуассона).

Локальна теорема Муавра-Лапласа. *Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях (в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p ($0 < p < 1$)) подія A з'явиться k раз наближено дорівнює*

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

де $q = 1 - p$,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. *Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях (в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p ($0 < p < 1$)) подія A з'явиться від k_1 до k_2 раз наближено дорівнює*

$$\mathbb{P}_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Зауваження.

1) При знаходженні значень функцій $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$ слід враховувати, що $\varphi(x)$ парна функція ($\varphi(-x) = \varphi(x)$), а $\Phi(x)$ непарна функція ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$),

$$\varphi(x) = 0, \quad \text{при } x \geq 4;$$

$$\Phi(x) = 0,5, \quad \text{при } x \geq 4.$$

2) Наближеними формулами Муавра-Лапласа на практиці доцільно користуватись у тому випадку, коли $npq \geq 10$. Якщо ж $npq < 10$, ці формули приводять до досить великої похибки.

Теорема Пуассона. *Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться k раз наближено дорівнює*

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np$.

Зауваження. Наближену формулу Пуассона доцільно використовувати при великих n і малих p (коли $np < 5$).

Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях.

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 < p < 1$), абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від ймовірності появи події не перевищить заданого додатного числа ε , наближено дорівнює подвоєному значенню функції Лапласа від $x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} \approx 2\Phi \left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right).$$

Найбільш ймовірне число появ події в незалежних випробуваннях.

Число k_0 (появи події в серії незалежних випробувань, в кожному з яких подія може відбутися з ймовірністю p) називається *найбільш ймовірним*, якщо ймовірність того, що дана подія відбудеться k_0 раз не менше ймовірності всіх інших можливих наслідків серії випробувань.

Число k_0 визначають з подвійної нерівності:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

причому:

- 1) якщо $np - q$ — дробове число, то існує єдине натуральне значення k_0 ;
- 2) якщо $np - q$ — ціле число, то існує два найбільш ймовірних числа k_0 і $k_0 + 1$;
- 3) якщо $np - q$ — ціле, то $k_0 = np$.

Приклад 4.1. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться не менше трьох раз в чотирьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність її появи в одному випробуванні дорівнює 0,4.

Розв'язання. За умовою $n = 4$, $p = 0,4$, $q = 1 - p = 0,6$. Необхідно обчислити ймовірність

$$\mathbb{P}_4(k \geq 3) = \mathbb{P}_4(3) + \mathbb{P}_4(4).$$

За формулою Бернуллі:

$$\mathbb{P}_4(3) = C_4^3 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^1 = \frac{4!}{3!1!} \cdot 0,064 \cdot 0,6 = 0,1536; \quad \mathbb{P}_4(4) = C_4^4 \cdot (0,4)^4 \cdot (0,6)^0 = 0,0256;$$

$$\mathbb{P}_4(k \geq 3) = 0,1536 + 0,0256 = 0,1792.$$

Відповідь: 0,1792.

Приклад 4.2. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених:

- а) 50 хлопчиків;
- б) не більше 45 і не менше 55 хлопчиків;
- в) не менше 60 хлопчиків.

Розв'язання. За умовою $n = 100$, $p = 0,51$, $q = 1 - p = 0,49$.

а) Викорисаємо локальну теорему Муавра-Лапласа:

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Обчислимо значення x при $k = 50$:

$$x = \frac{50 - 100 \cdot 0,51}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx -0,20.$$

За таблицею знайдемо значення функції $\varphi(-0, 20) = \varphi(0, 20) = 0,3910$. Тоді

$$\mathbb{P}_{100}(50) \approx \frac{0,3910}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} = 0,0782.$$

б) $k_1 = 45$, $k_2 = 55$. Використаємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа:

$$\mathbb{P}_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Обчислимо значення x_1 і x_2 :

$$x_1 = \frac{45 - 100 \cdot 0,51}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx -1,20; \quad x_2 = \frac{55 - 100 \cdot 0,51}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx 0,80.$$

За таблицею знайдемо значення функції

$$\Phi(-1,20) = -\Phi(1,20) = -0,3849; \quad \Phi(0,80) = 0,2881.$$

Тоді

$$\mathbb{P}_{100}(45 \leq k \leq 55) = 0,2881 - (-0,3849) = 0,2881 + 0,3849 = 0,673.$$

в) В цьому випадку $k_1 = 60$, $k_2 = 100$. Аналогічно до попереднього випадку використаємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа. Обчислимо:

$$x_1 = \frac{60 - 100 \cdot 0,51}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx 1,80; \quad x_2 = \frac{100 - 100 \cdot 0,51}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx 9,80.$$

За таблицею знайдемо значення функції

$$\Phi(1,80) = 0,4641; \quad \Phi(9,80) = 0,5, \quad \text{оскільки } 9,8 > 4.$$

Тоді

$$\mathbb{P}_{100}(k \geq 60) = 0,5 - 0,4641 = 0,0359.$$

Відповідь: а) 0,0782; б) 0,673; в) 0,0359.

Приклад 4.3. Ймовірність появи події A в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,9. Скільки необхідно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,98 можна було очікувати, що подія A відбудеться не менше ніж в 150 випробуваннях?

Розв'язання. За умовою $p = 0,9$; $q = 1 - p = 0,1$; $k_1 = 150$; $k_2 = n$; $\mathbb{P}_n(150 \leq k \leq n) = 0,98$.

За інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$\mathbb{P}_n(150 \leq k \leq n) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Підставляючи відомі величини, отримуємо:

$$0,98 = \Phi\left(\frac{n - 0,9n}{\sqrt{0,09n}}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{\sqrt{0,09n}}\right),$$

$$0,98 = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right).$$

Очевидно, що $n > 150$, тому $\frac{\sqrt{n}}{3} > 4,08$. Оскільки функція Лапласа зростаюча і $\Phi(4) \approx 0,5$, то можна вважати, що $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0,5$. Отже,

$$0,98 = 0,5 - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right);$$

$$\Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) = -0,48;$$

$$\Phi\left(-\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) = 0,48.$$

За таблицею значень функції Лапласа знайдемо $\Phi(2,06) = 0,48$. Отже,

$$-\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} = 2,06;$$

$$150 - 0,9n = -0,618\sqrt{n};$$

$$0,9n - 0,618\sqrt{n} - 150 = 0,$$

$$D = (0,618^2) + 4 \cdot 0,9 \cdot 150 = 540,3819;$$

$$\sqrt{n} = \frac{0,618 + \sqrt{540,3819}}{1,8} \approx 13,26;$$

$$n \approx 176.$$

Відповідь: 176.

Приклад 4.4. Ймовірність попадання в муху на льоту з рогатки при одному пострілі дорівнює 0,006. Зроблено 1000 пострілів. Знайти ймовірність того, що буде вбито: а) 3 мухи; б) не менше 3 мух.

Розв'язання. Застосуємо теорему Пуассона (оскільки $n = 1000$ досить велике, а $p = 0,006$ близьке до 0)

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \text{де } \lambda = np.$$

Маємо $\lambda = 1000 \cdot 0,006 = 6$.

а) Ймовірність того, що буде вбито 3 мухи дорівнює:

$$\mathbb{P}_{1000}(3) \approx \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} = 0,089235.$$

б) Обчислимо ймовірність того, що буде вбито менше 3 мух:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1000}(0 \leq k < 3) &= \mathbb{P}_{1000}(0) + \mathbb{P}_{1000}(1) + \mathbb{P}_{1000}(2) = \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 \cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} = \\ &= 0,002479 + 0,0148725 + 0,044618 = 0,06197. \end{aligned}$$

Тоді ймовірність протилежної події, яка полягає в тому, що буде вбито не менше 3 мух дорівнює:

$$\mathbb{P}_{1000}(k \geq 3) = 1 - \mathbb{P}_{1000}(0 \leq k < 3) = 1 - 0,06197 = 0,93803.$$

Відповідь: а) 0,089235; б) 0,93803.

Приклад 4.5. Ймовірність появи деякої події A в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,6. Знайти кількість випробувань, при якій з ймовірністю 0,8 можна було б очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,03.

Розв'язання. За умовою $p = 0,6$; $q = 1 - p = 0,4$; $\varepsilon = 0,03$;

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - 0,6\right| \leq 0,03\right\} = 0,8.$$

Використаємо формулу:

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} \approx 2\Phi \left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right).$$

За умовою

$$2\Phi \left(0,03 \sqrt{\frac{n}{0,6 \cdot 0,4}} \right) = 0,8;$$

$$\Phi(0,0612\sqrt{n}) = 0,4.$$

За таблицею значень функції $\Phi(x)$ знайдемо $\Phi(1,28) = 0,4$. Отже,

$$0,0612\sqrt{n} = 1,28; \quad \sqrt{n} = 20,9; \quad n = 437.$$

Відповідь: 437.

Приклад 4.6. Ймовірність виграшу в лотерею на один квиток дорівнює 0,2. Куплено 20 квитків. Знайти найбільш ймовірну кількість виграшних квитків та відповідну ймовірність.

Розв'язання. Позначимо найбільш ймовірну кількість виграшних квитків k_0 . Тоді має місце нерівність

$$np - p \leq k_0 \leq np + q,$$

де $q = 1 - p = 0,8$.

$$4 - 0,2 \leq k_0 \leq 4 + 0,8;$$

$$3,8 \leq k_0 \leq 4,8.$$

Оскільки k_0 — ціле число, то з останньої нерівності маємо $k_0 = 4$. Відповідну ймовірність $\mathbb{P}_{20}(4)$ обчислимо за допомогою локальної теореми Муавра-Лапласа:

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad \text{де } \varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Маємо:

$$x = \frac{4 - 4}{\sqrt{3,2}} = 0, \quad \varphi(0) = 0,3989;$$

$$\mathbb{P}_{20}(4) = \frac{0,3989}{\sqrt{3,2}} = 0,22299.$$

Відповідь: 4; $\mathbb{P}_{20}(4) = 0,22299$.

6. Ряд розподілу, функція розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини

Випадковою величиною, пов'язаною з даним ймовірнісним експериментом, називається величина, яка при кожному здійсненні цього експерименту приймає те чи інше числове значення, причому заздалегідь невідомо, яке саме.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина її можливих значень є скінченною або зчисленною множиною.

Законом розподілу випадкової величини називається довільна відповідність, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

У випадку дискретної випадкової величини закон розподілу найзручніше описувати за допомогою ряду розподілу — таблиці, де вказано всі можливі значення цієї випадкової величини та відповідні їм ймовірності:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$\mathbb{P}\{X = x_i\}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

причому $\sum_i p_i = 1$.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, значення якої дорівнює ймовірності того, що випадкова величина прийме значення, яке менше x , тобто

$$F(x) = \mathbb{P}\{X < x\}.$$

Властивості функції розподілу:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
2. $F(x)$ — неспадна функція, тобто $F(x_1) \geq F(x_2)$, якщо $x_1 > x_2$.
3. $F(x)$ — неперервна зліва.

Числові характеристики дискретних випадкових величин

1. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X , яка набуває значень x_i з ймовірностями p_i називається число

$$M[X] = \sum_i x_i p_i.$$

Властивості математичного сподівання:

1. $M[C] = C$, $C = \text{const}$.
2. $M[CX] = CM[X]$.
3. $M[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + \dots + M[X_n]$, X_i — випадкові величини.
4. $M[X_1 X_2 \dots X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdot \dots \cdot M[X_n]$, X_i — незалежні випадкові величини.

2. Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D[X] = M[X - M[X]]^2.$$

Для дискретної випадкової величини при обчисленні дисперсії використовують формули:

$$D[X] = \sum_i (x_i - M[X])^2 p_i,$$

$$D[X] = \sum_i x_i^2 p_i - (M[X])^2.$$

Властивості дисперсії:

1. $D[C] = 0, C = \text{const.}$

2. $D[CX] = C^2 D[X].$

3. $D[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + \dots + D[X_n], X_i$ — незалежні випадкові величини.

3. Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають число

$$\sigma = \sqrt{D[X]}.$$

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення характеризують ступінь розсіяння значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Мододо дискретної випадкової величини називається найбільш ймовірне її значення. Розподіл називається унімодальним, якщо він має єдину моду (біноміальний, показниковий та ін.). Розподіл називається полімодальним, якщо він має більше одніє моди (рівномірний та ін.).

Медіаною випадкової величини називається таке число $Me(X)$, для якого виконується умова: $\mathbb{P}\{X < Me(X)\} = \mathbb{P}\{X > Me(X)\}$.

Набільш важливі розподіли дискретних випадкових величин

1. *Рівномірний розподіл* — це розподіл випадкової величини X , яка приймає n різних значень з ймовірностями $\frac{1}{n}$.

$$M[X] = \frac{n+1}{2}; \quad D[X] = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. *Біноміальний розподіл* — це розподіл випадкової величини X , яка приймає значення $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ з ймовірностями $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $q = 1 - p$.

Біноміальний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості "успіхів" у серії з n незалежних випробувань у кожному з яких "успіх" відбувається з ймовірністю p .

$$M[X] = np, \quad D[X] = npq.$$

3. *Показниковий розподіл* — це розподіл випадкової величини X , яка приймає значення $k \in \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ з ймовірностями $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, де $\lambda = np$.

$$M[X] = \lambda, \quad D[X] = \lambda.$$

4. *Геометричний розподіл* — це розподіл випадкової величини X , яка приймає значення $k \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ з ймовірностями $p_k = pq^{k-1}$, де $q = 1 - p$.

Геометричний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості спроб до першого "успіху" у серії незалежних випробувань у кожному з яких ймовірність успіху дорівнює p .

$$M[X] = \frac{1}{p}, \quad D[X] = \frac{1-p}{p^2}.$$

5. *Гіпергеометричний розподіл* — це розподіл випадкової величини X , яка приймає значення $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ з ймовірностями $p_k = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$, де $n \geq m, N \geq n$.

Приклад 6.1. В партії з семи деталей є чотири стандартні. Випадковим чином відібрані три деталі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X —

числа стандартних деталей серед відібраних. Знайти функцію розподілу та числові характеристики випадкової величини X .

Розв'язання. Очевидно, що випадкова величина X може набувати значень

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Обчислимо ймовірності можливих значень випадкової величини X :

$$p_0 = \mathbb{P}\{X = 0\} = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3!4!}{7!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{35};$$

$$p_1 = \mathbb{P}\{X = 1\} = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{3!4!}{7!} = \frac{12}{35};$$

$$p_2 = \mathbb{P}\{X = 2\} = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{3!4!}{7!} = \frac{18}{35};$$

$$p_3 = \mathbb{P}\{X = 3\} = \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^3} = \frac{4!}{3!1!} \cdot 1 \cdot \frac{3!4!}{7!} = \frac{4}{35}.$$

Отже, шуканий закон розподілу:

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Для контролю обчислимо суму ймовірностей

$$\sum_{i=0}^3 p_i = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.$$

Зауважимо, що дана випадкова величина має гіпергеометричний розподіл.

Запишемо функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{35} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{35} + \frac{12}{35} & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} & \text{при } x > 3. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{35} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \frac{13}{35} & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ \frac{31}{35} & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Обчислимо числові характеристики випадкової величини X .

Математичне сподівання:

$$M[X] = \sum_{i=0}^3 x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{60}{35} = \frac{12}{7}.$$

Дисперсія:

$$D[X] = \sum_{i=0}^3 x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 4 \cdot \frac{18}{35} + 9 \cdot \frac{4}{35} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{120}{35} - \frac{144}{49} = \frac{24}{49}.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

7. Функція розподілу, щільність розподілу, числові характеристики неперервної випадкової величини

Випадкова величина називається *неперервною*, якщо її функція розподілу є неперервною функцією.

Якщо X — неперервна випадкова величина, то ймовірність того, що X набуде деякого свого конкретного значення дорівнює 0 ($\mathbb{P}\{X = x_0\} = 0$).

Найпоширенішим способом задання розподілу неперервної випадкової величини є задання її функції розподілу $F(x)$.

Тоді для будь-якого проміжку $a, b >$ можна обчислити ймовірність

$$\mathbb{P}\{X \in < a, b >\} = F(b) - F(a).$$

Випадкова величина X називається *абсолютно неперервною*, якщо існує така функція $f(x)$, для якої має місце рівність

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

При цьому функція $f(x)$ називається *щільністю розподілу випадкової величини* X (або диференціальною функцією розподілу).

Очевидно, що

$$F'(x) = f(x)$$

в кожній точці неперервності функції $f(x)$.

Властивості функції щільності:

- 1) $f(x) \geq 0$;
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (*характеристична властивість функції щільності*);
- 3) площа фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, та віссю Ox дорівнює 1 (*геометрична властивість функції щільності*);
- 4) $\mathbb{P}\{X \in < a, b >\} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Числові характеристики неперервних випадкових величин

1. Математичне сподівання:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

2. Дисперсія:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx;$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2.$$

3. Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D[X]}.$$

Набільш важливі розподіли дискретних випадкових величин

1. Розподіл випадкової величини X називається *рівномірним* на відріжку $[a, b]$, якщо його щільність має вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin [a; b], \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a; b]. \end{cases}$$

Функція розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a < x \leq b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Графіки щільності та функції розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини зображені на мал.

Числові характеристики рівномірного розподілу:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}; \quad D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Розподіл випадкової величини X називається *нормальним* з параметрами a, σ , якщо його щільність має вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Графік функції щільності нормального розподілу при $a = 0, \sigma = 1$ має вид:

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини має вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

При $a = 0$, $\sigma = 1$ функцією нормального розподілу є функція Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

значення якої табульовані.

Функції $F(x)$ і $\Phi(x)$ пов'язані співвідношенням:

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Графік функції $\Phi(x)$ має вид:

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X набуде значення, яке належить відріzkу $[\alpha; \beta]$ дорівнює

$$\mathbb{P}\{X \in [\alpha; \beta]\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X набуде значення, яке належить відрізку $[a - \delta; a + \delta]$ дорівнює

$$\mathbb{P}\{|X - a| \leq \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Наслідками останньої формули є наступні співвідношення:

$$\mathbb{P}\{|X - a| \leq \sigma\} = 0,6827;$$

$$\mathbb{P}\{|X - a| \leq 2\sigma\} = 0,9545;$$

$$\mathbb{P}\{|X - a| \leq 3\sigma\} = 0,9973.$$

Остання формула виражає *правило трьох сігм*: ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення з відрізку $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$ дорівнює 0,9973.

Числові характеристики нормального розподілу:

$$M[X] = a; \quad D[X] = \sigma^2.$$

3. Розподіл випадкової величини X називається *експоненційним (показниковим)* з параметром $a > 0$, якщо його щільність має вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ ae^{-ax}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Функція розподілу випадкової величини з експоненційним розподілом має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-ax}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Графік функції щільності експоненційного розподілу має вид:

Числові характеристики експоненційного розподілу:

$$M[X] = \frac{1}{a}; \quad D[X] = \frac{1}{a^2}.$$

Приклад 7.1. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a , знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність попадання в інтервал $(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4})$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a \sin x, & \text{якщо } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ 0, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Розв'язання. 1. За властивістю функції щільності маємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a \sin x dx = -a \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \\ &= -a(\cos 0 - \cos(-\frac{\pi}{2})) = -a(1 - 0) = -a. \end{aligned}$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, то $-a = 1$ і $a = -1$.

2. Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини. Як відомо, $F'(x) = f(x)$. Тому

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ -a \cos x + C, & \text{якщо } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ 1 & \text{якщо } x > 0. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x + C, & \text{якщо } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ 1 & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Разом з цим $F(-\frac{\pi}{2}) = 0$. Тому

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C = 0, \quad C = 0.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{якщо } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ 1 & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

3. Числові характеристики.

Математичне сподівання:

$$\begin{aligned} M[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x \sin x dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x d \cos x = \left[x \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx \right] = \\ &= [x \cos x - \sin x] \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = (0 \cos 0 - \sin 0) - \left(-\frac{\pi}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = -1. \end{aligned}$$

Отже, $M[X] = -1$

Дисперсія.

$$\begin{aligned}
D[X] &= M[(X - M[X])^2] = M[X^2] - M^2[X] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (-1)^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x^2 \cdot (-1) \cdot \sin x dx - 1 = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x^2 d \cos x - 1 = x^2 \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx^2 - 1 = \\
&= 0 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1 - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x \cos x dx = \\
&= -1 - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x d \sin x = -1 - 2(x \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx) = \\
&= -1 - 2(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0) = \\
&= -1 - 2\left(-\frac{\pi}{2} + \cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -1 + \pi - 2 = \pi - 3.
\end{aligned}$$

Середнє квадратичне відхилення.

$$\sigma = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\pi - 3}.$$

4. Обчислимо ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\mathbb{P}\left\{X \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)\right\} = F\left(-\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8. Нормальний закон розподілу ймовірностей. Граничні теореми теорії ймовірностей

Граничні теореми теорії ймовірностей можна умовно розбити на два класи: закони великих чисел та центральні граничні теореми.

Закони великих чисел математично описують стійкість середніх значень масових випадкових явищ.

Теорема 1 (Я. Бернуллі). *Нехай k — кількість появ події A в серії з n незалежних випробувань, у кожному з яких подія відбувається з ймовірністю p . Тоді для довільного $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{k}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Теорема 2 (П.Л.Чебишов). *Нехай $\{X_k\}$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями $M[X_k]$ і обмеженими дисперсіями $D[X_k] \leq c_0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M[X_1] + M[X_2] + \dots + M[X_n]}{n} \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Нерівність Чебишова. *Нехай X — довільна випадкова величина з дисперсією $D[X]$ та математичним сподіванням $M[X]$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$:*

$$\mathbb{P}\{|X - M[X]| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Нерівність Чебишова можна записати також у формі:

$$\mathbb{P}\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} < \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 3 (центральна гранична теорема). *Нехай X_k — однаково розподілені випадкові величини з математичним сподіванням $M[X_k] = a$ і дисперсією $D[X] = \sigma^2$. Тоді при великому n розподіл суми $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ близький до нормального розподілу.*

Якщо результуюча випадкова величина має математичне сподівання $M[X]$ і дисперсію $D[X]$, то з теореми 3 випливає, що

$$\mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} \approx \Phi \left(\frac{b - M[X]}{\sqrt{D[X]}} \right) - \Phi \left(\frac{a - M[X]}{\sqrt{D[X]}} \right);$$

$$\mathbb{P}\{M[X] - \delta \leq X \leq M[X] + \delta\} \approx 2\Phi \left(\frac{\delta}{\sqrt{D[X]}} \right);$$

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{k}{n} - \delta \leq X \leq \frac{k}{n} + \delta \right\} \approx 2\Phi \left(\delta \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \right).$$

Приклад 8.1. Відомо, що 10% продукції заводу бракована. Для перевірки відібрано 900 одиниць продукції. X — кількість бракованих виробів у відібраній партії. Вказати межі, в які попадає випадкова величина X з ймовірністю 0,9.

Розв'язання. Кількість бракованих виробів є випадковою величиною $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{900}$, де $X_1, \dots, X_{900}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з яких приймає значення 0 та 1 з ймовірностями 0,9 та 0,1 відповідно.

Згідно з центральною граничною теоремою, можна вважати, що випадкова величина X має розподіл, який близький до нормального.

За умовою: $p = 0,1$, $n = 900$. Тоді

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{X}{900} - 0,1\right| < \delta\right\} \approx 2\Phi\left(\sqrt{\frac{900}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 0,9.$$

Отже, $\Phi(100\delta) = 0,45$. За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $\Phi(1,65) = 0,45$. Звідси $100\delta = 1,65$ і $\delta = 0,0165$. Отже, з ймовірністю 0,9 буде виконуватись умова $\left|\frac{X}{900} - 0,1\right| < 0,0165$, що рівносильно тому, що випадкова величина попаде в інтервал (75; 105) з ймовірністю 0,9.

9. Система двох дискретних випадкових величин

Двовимірною називають випадкову величину (X, Y) , значеннями якої є пари чисел (x, y) . Складові X і Y , які розглядаються одночасно утворюють систему випадкових величин.

Функцію розподілу двовимірної випадкової величини називають функцію $F(x, y)$, яка для кожної пари дійсних чисел (x, y) визначає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення не більші x , і при цьому випадкова величина Y прийме значення, не більші y :

$$F(x, y) = \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\}.$$

Властивості функції розподілу:

1. Знайдення функції розподілу задовольняють подвійну нерівність:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

2. Функція розподілу є неспадною функцією по кожній із змінних

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \quad \text{якщо } x_2 > x_1,$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \quad \text{якщо } y_2 > y_1.$$

3. Мають місце наступні наступні граничні співвідношення:

$$F(-\infty, y) = 0, \quad F(x, -\infty) = 0,$$

$$F(-\infty, -\infty) = 0, \quad F(\infty, \infty) = 1.$$

4. 1) При $y = \infty$ функція розподілу системи (X, Y) перетворюється у функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x, \infty) = F_X(x).$$

2) При $x = \infty$ функція розподілу системи (X, Y) перетворюється у функцію розподілу випадкової величини Y :

$$F(\infty, y) = F_Y(y).$$

Використовуючи функцію розподілу, можна знайти ймовірність:

$$\mathbb{P}\{a < X < b, c < Y < d\} = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c).$$

Двовимірні дискретні випадкові величини:

Двовимірна випадкова величина (X, Y) називається *дискретною*, якщо випадкові величини X та Y є дискретними.

В цьому випадку двовимірну випадкову величину зручно задавати у вигляді таблиці:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}

де $p_{ij} = \mathbb{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$. При цьому $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$.

Функція розподілу дискретної двовимірної випадкової величини має вид

$$F(x, y) = \sum_{(i,j): \begin{cases} x_i < x, \\ y_j < y \end{cases}} p_{ij}.$$

Безумовні закони розподілу випадкових величин X і Y можна визначити за формулами:

$$\mathbb{P}\{X = x_i\} = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in},$$

$$\mathbb{P}\{Y = y_j\} = p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{mj}.$$

Для обчислення числових характеристик випадкових величин X і Y можна використовувати їх безумовні розподіли.

Умовні закони розподілу можна визначити за формулами:

$$\mathbb{P}\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{mj}};$$

$$\mathbb{P}\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in}}.$$

Коефіцієнтом кореляції системи двох дискретних випадкових величин називається число

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} - M[X]M[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Для довільних випадкових величин

$$-1 \leq r_{XY} \leq 1.$$

Чим ближче $|r_{XY}|$ до 1, тим сильніший рівень залежності між X та Y . Якщо $r_{XY} = 0$, то випадкові величини є незалежними (некорельованими).

Двовимірні неперервні випадкові величини:

Двовимірна випадкова величина (X, Y) називається *неперервною*, якщо випадкові величини X та Y є неперервними.

Двовимірною щільністю розподілу неперервної двовимірної випадкової величини називається друга мішана похідна від функції розподілу:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Знаючи щільність розподілу можна знайти функцію розподілу за формулою:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy.$$

Ймовірність попадання випадкової величини (X, Y) в область D визначається за формулою:

$$\mathbb{P}\{(X, Y) \in D\} = \int \int_D f(x, y) dx dy.$$

Властивості двовимірної щільності розподілу:

1. $f(x, y) \geq 0$.

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Щільність розподілу складової X має вид:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Щільність розподілу складової Y має вид:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Умовна щільність розподілу складової X має вид:

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Умовна щільність розподілу складової Y має вид:

$$\psi(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

Якщо умовні щільності розподілу X і Y співпадають з безумовними, то такі величини незалежні.

Знаючи щільності розподілу $f_X(x)$ і $f_Y(y)$, можна знайти їх числові характеристики (математичне сподівання та дисперсію).

Іноді зручніше використовувати формули, які містять двовимірну щільність розподілу (подвійні інтеграли при цьому беруться по області можливих значень):

$$M[X] = \int \int x f(x, y) dx dy, \quad M[Y] = \int \int y f(x, y) dx dy;$$

$$D[X] = \int \int (x - M[X])^2 f(x, y) dx dy = \int \int x^2 f(x, y) dx dy - (M[X])^2;$$

$$D[Y] = \int \int (y - M[Y])^2 f(x, y) dx dy = \int \int y^2 f(x, y) dx dy - (M[Y])^2.$$

Коефіцієнт коерляції для неперервних випадкових величин може бути знайдений по формулі:

$$r_{XY} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - M[X]M[Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])(y - M[Y]) f(x, y) dx dy}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Приклад 9.1. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ заданий таблицею.

$X \backslash Y$	1	2	3	4
0	0	0	0	0,1
1	0,3	0,2	0,1	0
2	0,1	0,1	0,1	0

1) Знайдіть безумовні розподіли складових X і Y та їх числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $M(Y)$, $D(Y)$, σ_Y .

2) Обчисліть коефіцієнт кореляції r_{XY} .

3) Побудуйте умовні закони розподілу $X|Y = 3$ і $Y|X = 1$.

Розв'язання. Безумовний закон розподілу X :

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	0,1	0,6	0,3

Безумовний закон розподілу Y :

Y	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	0,4	0,3	0,2	0,1

Математичне сподівання X :

$$M[X] = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 0 + 0,6 + 0,6 = 1,2.$$

Дисперсія X :

$$D[X] = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 0 + 0,6 + 1,2 - 1,44 = 0,36.$$

Середнє квадратичне відхилення X :

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

Математичне сподівання Y :

$$M[Y] = \sum_{i=1}^4 y_i p_i = 0,4 + 0,6 + 0,6 + 0,4 = 2.$$

Дисперсія Y :

$$D[Y] = \sum_{i=1}^4 y_i^2 p_i - (M[Y])^2 = 0,4 + 1,2 + 1,8 + 1,6 - 4 = 1.$$

Середнє квадратичне відхилення Y :

$$\sigma_Y = \sqrt{D[Y]} = \sqrt{1} = 1.$$

Коефіцієнтом кореляції:

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} - M[X]M[Y]}{\sigma_X \sigma_Y};$$

$$\sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 0 + 0 + 0 + 0 + 0,3 + 0,4 + 0,3 + 0 + 0,2 + 0,4 + 0,6 + 0 = 2,2;$$

$$r_{XY} = \frac{2,2 - 1,2 \cdot 2}{0,6 \cdot 1} = \frac{-0,2}{0,6} = -\frac{1}{3}.$$

Побудуємо умовні закони розподілу $X|Y = 3$.

$X Y = 3$	0	1	2
$\mathbb{P}$	0	0,5	0,5

$$p_1 = \frac{0}{0,2} = 0, \quad p_2 = \frac{0,1}{0,2} = 0,5; \quad p_3 = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$

Побудуємо умовні закони розподілу $Y|X = 1$.

$Y X = 1$	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0

$$p_1 = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2}; \quad p_2 = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}; \quad p_3 = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}; \quad p_4 = \frac{0}{0,6} = 0.$$

Приклад 9.2. За законом розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) знайти умовні закони розподілу та числові характеристики двовимірного розподілу.

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & \text{якщо } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0 \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу X .

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \\ &= \begin{cases} 6 \int_0^{+\infty} e^{-(2x+3y)} dy, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} -6e^{-2x} \cdot \frac{1}{3} e^{-3y} \Big|_0^{+\infty}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 + 2e^{-2x} e^0, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \\
 &= \begin{cases} 6 \int_0^{+\infty} e^{-(2x+3y)} dx, & y > 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -6e^{-3y} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} \Big|_0^{+\infty}, & y > 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

З урахуванням цих співвідношень знаходимо умовні щільності розподілу:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{якщо } y > 0, x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0 \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 3e^{-3y}, & \text{якщо } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0 \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Оскільки умовні щільності розподілу співпадають з безумовними і добуток щільностей розподілу складових дорівнює їх сумісній щільності розподілу

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x, y),$$

то випадові величини X і Y незалежні, а отже, некорельовані.

Знайдемо числові характеристики X :

$$\begin{aligned}
 M[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} 2x e^{-2x} dx = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-2x} dx = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x d(e^{-2x}) = \\
 &= - \lim_{b \rightarrow \infty} \left(x e^{-2x} \Big|_0^b - \int_0^b e^{-2x} dx \right) = - \lim_{b \rightarrow \infty} \left(x e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - (M[X])^2 = \int_0^{\infty} 2x^2 e^{-2x} dx - \frac{1}{4} = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^2 e^{-2x} dx - \frac{1}{4} = \\
 &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^2 d(e^{-2x}) - \frac{1}{4} = - \lim_{b \rightarrow \infty} \left(x^2 e^{-2x} \Big|_0^b - 2 \int_0^b e^{-2x} x dx \right) - \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \\
 \sigma_X &= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

10. Елементи математичної статистики

1. Вибірковий метод. Емпірична функція розподілу.

Нехай для вивчення кількісної (дискретної або неперервної) ознаки X з генеральної сукупності утворено вибірку $x_1, x_2, \dots, x_n$ обсягом n елементів.

Якщо записати елементи у порядку зростання отримаємо *варіаційний ряд*.

Спостережувані різні значення x_i ознаки X називаються *варіантами*, кількість значень однієї варіанти у вибірці — її *частотою* n_i , відношення частоти до обсягу вибірки — *відносною частотою* або *емпіричною ймовірністю*.

Емпіричною функцією розподілу називають функцію

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x — кількість елементів вибірки, менших від x , n — обсяг вибірки.

Полігоном частот називають ламану, що з'єднує точки

$$(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k).$$

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є інтервали, а висотами — їх частоти (відносні частоти).

При неперервному розподілі ознаки X у разі великої кількості спостережень весь інтервал, якому належать спостережувані значення, як правило, розбивають на декілька частин однакової довжини h і знаходять суми частот варіант, що потрапили в кожний утворений інтервал. Для вибору оптимальної довжини інтервалу використовують формулу:

$$h \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,2 \cdot \lg n}.$$

2. Числові характеристики вибірки.

2.1. Вибіркове середнє:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n}.$$

2.2. Вибіркова дисперсія:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2.$$

2.3. Вибіркове середнє квадратичне відхилення: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

2.4. Медіаною називається значення середнього елемента варіаційного ряду.

Якщо обсяг вибірки $n = 2t + 1$, то медіаною буде значення елемента з номером $t + 1$.

Якщо $n = 2t$, то медіаною буде середнє арифметичне елементів вибірки з номерами t і $t + 1$.

Якщо задано інтервальний статистичний розподіл вибірки, то

$$Me = x_{Me} + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{Me-1} n_i}{n_{Me}},$$

де x_{Me} — нижня межа медіанного інтервалу; h — довжина медіанного інтервалу; n_{Me} — частота медіанного інтервалу.

2.5. *Мододою* називається варіанта з найбільшою частотою.

Якщо задано інтервальний статистичний розподіл вибірки, то

$$Mo = x_{Mo} + h \cdot \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}},$$

де x_{Mo} — нижня межа модального інтервалу; n_{Mo} — частота модального інтервалу; n_{Mo-1} — частота передмодального інтервалу; n_{Mo+1} — частота післямодального інтервалу.

3. Статистичні оцінки параметрів розподілу.

Статистичною оцінкою θ^* невідомого параметра θ теоретичного розподілу називається функція $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ від спостережуваних значень випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Точковою називають статистичну оцінку, яка визначається одним числом $\theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — результати спостережень над кількісною ознакою X .

Незміщеною називають точкову оцінку θ^* , математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру θ при будь-якому обсязі вибірки.

Незміщеною оцінкою генерального середнього є вибіркове середнє.

Зміщеною оцінкою генеральної дисперсії є вибіркова дисперсія.

Незміщеною оцінкою генеральної дисперсії є виправлена вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2.$$

Для знаходження точкових оцінок використовують:

1. *Метод моментів* — метод при якому для обчислення невідомих параметрів заданого розподілу прирівнюють відповідні теоретичні та емпіричні моменти.

2. *Метод найбільшої правдоподібності* полягає в знаходженні максимуму функції одного або кількох оцінюваних параметрів.

Інтервальною називають оцінку, яка визначається числовим інтервалом.

Довірчим називається інтервал (θ_1, θ_2) , в який із заданою надійністю γ попадає значення параметра θ .

1. Інтервальна оцінка математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини X :

$$\bar{x} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$.

2. Інтервальна оцінка середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини X :

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \quad q < 1;$$

$$0 < \sigma < s(1+q), \quad q > 1;$$

де $q = q(\alpha, n)$ — табульована функція.

3. Інтервальна оцінка невідомої ймовірності p біноміального розподілу за відносною частотою w :

$$p_1 < p < p_2,$$

де

$$p_1 = \frac{n}{t_\gamma^2 + n} \left(w + \frac{t_\gamma^2}{2n} - t_\gamma \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n} \right)^2} \right);$$

$$p_2 = \frac{n}{t_\gamma^2 + n} \left(w + \frac{t_\gamma^2}{2n} + t_\gamma \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n} \right)^2} \right),$$

де $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$, $w = \frac{m}{n}$ — відносна частота.

4. Елементи теорії регресії і кореляції.

Вибірковим рівнянням прямої лінії регресії Y на X (X і Y — випадкові величини, що спостережуються) називається рівняння

$$y - \bar{y} = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \bar{x}),$$

де $\bar{x}$ і $\bar{y}$ — вибіркові середні значення випадкових величин X і Y ; σ_X і σ_Y — вибіркові середні квадратичні відхилення; r_{XY} — вибірковий коефіцієнт кореляції.

5. Статистичні гіпотези. Статистичні критерії.

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу або про параметри відомих розподілів.

Нульовою гіпотезою H_0 називають висунуту гіпотезу.

Альтернативною (конкуруючою) гіпотезою H_1 називають протилежну до нульової гіпотези.

Похибка першого роду полягає у відхиленні правильної нульової гіпотези внаслідок її перевірки.

Рівень значущості α — це ймовірність похибки першого роду.

Похибка другого роду полягає у прийнятті неправильної нульової гіпотези внаслідок її перевірки.

Статистичним критерієм називають випадкову величину K , яка використовується для перевірки нульової гіпотези.

Критична область — це сукупність значень критерію, при яких відхиляють нульову гіпотезу.

Область прийняття гіпотези — сукупність значень критерію, при якій приймають нульову гіпотезу.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез полягає в наступному: якщо спостережуване значення критерію належить критичній області, то нульову гіпотезу відхиляють; якщо спостережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези, то нульову гіпотезу приймають.

Критичними точками називають ті точки, що відділяють критичну область від області прийняття гіпотези.

Правостороння критична область визначається нерівністю: $K > k_{kp}$.

Лівостороння критична область визначається нерівністю: $K < k_{kp}$.

Двостороння критична область визначається нерівностями: $K < k_1$, $K > k_2$.

Для визначення критичної області задають рівень значущості α і шукають критичні точки з таких співвідношень:

- 1) для правосторонньої критичної області: $\mathbb{P}\{K > k_{kp}\} = \alpha$;
- 2) для лівосторонньої критичної області: $\mathbb{P}\{K < k_{kp}\} = \alpha$;
- 3) для двосторонньої (симетричної) критичної області: $\mathbb{P}\{K < -k_{kp}\} = \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}\{K > k_{kp}\} = \frac{\alpha}{2}$.

Потужністю критерію називають ймовірність попадання критерію в критичну область при умові, що правильною є конкуруюча гіпотеза.

Приклад 10.1. З генеральної сукупності утворено вибірку. З рівнем значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності та побудувати довірчий інтервал для математичного сподівання генеральної сукупності.

x_i	-5	-3	-1	1	3	5	7	9
n_i	5	9	13	18	21	18	10	6

Розв'язання.

1. Обсяг вибірки $n = \sum_{i=1}^8 n_i = 100$. Обчислимо середнє вибіркове значення.

$$\bar{x} = \frac{-5 \cdot 5 - 3 \cdot 9 - 1 \cdot 13 + 1 \cdot 18 + 3 \cdot 21 + 5 \cdot 18 + 7 \cdot 10 + 9 \cdot 6}{100} = 2,3.$$

Обчислимо вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 9 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 18 + 3^2 \cdot 21 + 5^2 \cdot 18 + 7^2 \cdot 10 + 9^2 \cdot 6}{100} - 2,3^2} \approx 3,64.$$

2. Визначимо теоретичні частоти за формулою

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma} \cdot \varphi(u_i), \quad u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}.$$

Результати обчислень запишемо в таблицю:

i	x_i	u_i	$\varphi(u_i)$	n'_i	$\frac{(n'_i - n_i)^2}{n'_i}$
1	-5	-2,01	0,0529	2,91	1,50
2	-3	-1,46	0,1374	7,56	0,27
3	-1	-0,91	0,2637	14,50	0,16
4	1	-0,36	0,3739	20,56	0,32
5	3	0,19	0,3918	21,54	0,01
6	5	0,74	0,3034	16,68	0,10
7	7	1,29	0,1736	9,55	0,02
8	9	1,84	0,0529	4,04	0,95

3. Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти. Для цього використаємо критерій Пірсона (критерій χ^2). Обчислимо спостережуване значення критерію

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 3,33.$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів свободи $s = k - 2 = 5$ знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області:

$$\chi_{kp}^2(0,05; 5) = 11,07.$$

Оскільки спостережуване значення менше критичного, то з рівнем надійності 0,95 приймається гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Побудуємо довірчий інтервал для математичного сподівання генеральної сукупності.

$$\bar{x} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$, $t_\gamma = 1,96$,

$$2,3 - 1,96 \cdot \frac{3,64}{\sqrt{100}} < a < 2,3 + 1,96 \cdot \frac{3,64}{\sqrt{100}};$$

$$1,58656 < a < 3,01344.$$

Отже, $\mathbb{P}\{a \in (1,58656; 3,01344)\} = 0,95$.

ПЕРЕЛІК КОНТРОЛЬНИХ ПИТАНЬ

- (1) Дайте означення перестановки, комбінації, розміщення без повторень та з повтореннями.
- (2) Запишіть формули для обчислення кількості перестановок, комбінацій та розміщень.
- (3) Перелічіть властивості комбінацій.
- (4) Що називають трикутником Паскаля?
- (5) Запишіть формулу бінома Ньютона.
- (6) Сформулюйте поліноміальну теорему.
- (7) Що називають випробуванням?
- (8) Дайте означення елементарної події, простору елементарних подій.
- (9) Що таке випадкова подія? неможлива подія? достовірна подія?
- (10) Сформулюйте класичне означення ймовірності.
- (11) Сформулюйте геометричне означення ймовірності.
- (12) Сформулюйте статистичне означення ймовірностей.
- (13) Дайте означення суми, добутку та різниці двох подій.
- (14) Яку подію називають протилежною подією?
- (15) Які події називають несумісними.
- (16) Сформулюйте теорему додавання для несумісних подій.
- (17) Які події називають незалежними?
- (18) Наведіть приклад системи подій, незалежних попарно, але залежних в сукупності.
- (19) Сформулюйте теорему множення для незалежних подій.
- (20) Дайте означення умовної ймовірності.
- (21) Сформулюйте теорему множення для умовних ймовірностей.
- (22) Що називають повною групою подій?
- (23) Сформулюйте теорему про формулу повної ймовірності.
- (24) Запишіть формулу Байєса.
- (25) Що розуміють під словами "схема Бернуллі"?
- (26) Запишіть формулу Бернуллі.
- (27) Сформулюйте локальну та інтегральну теорему Муавра-Лапласа.
- (28) Сформулюйте локальну теорему Пуасона.
- (29) Сформулюйте закон великих чисел.
- (30) Дайте означення випадкової величини.
- (31) Яку випадкову величину називають дискретною? неперервною?
- (32) Що називають функцією розподілу випадкової величини?
- (33) Запишіть формули для обчислення математичного сподівання дискретної та неперервної випадкових величин.
- (34) Як обчислити дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини?
- (35) Назвіть властивості числових характеристик випадкових величин.
- (36) Опишіть класичні дискретні розподіли випадкових величин: біноміальний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний розподіл, поліноміальний розподіл.

- (37) Опишіть класичні неперервні розподіли випадкових величин: рівномірний розподіл, нормальний розподіл, розподіл Коші, розподіл Хі-квадрат, розподіл Ст'юдента, розподіл Фішера.
- (38) Яка роль нормального розподілу в теорії ймовірностей?
- (39) Сформулюйте центральну граничну теорему.
- (40) Дайте означення системи випадкових величин.
- (41) Запишіть формули розрахунку числових характеристик системи випадкових величин.
- (42) Що називають лінією регресії? Як її побудувати?
- (43) Що називають генеральною сукупністю? вибіркою?
- (44) Опишіть способи задання вибірки.
- (45) Що називають варіаційним рядом?
- (46) Які Ви знаєте середні значення варіаційного ряду? Запишіть формули для їх обчислення.
- (47) Як обчислити дисперсію та стандартне відхилення варіаційного ряду?
- (48) Як побудувати емпіричну функцію розподілу?
- (49) Що називають полігоном частот і як він будується?
- (50) Побудуйте гістограму варіаційного ряду.
- (51) Що називають точковою оцінкою?
- (52) Які точкові оцінки називають незміщеними? зміщеними?
- (53) Що називають інтервальною оцінкою? довірчим інтервалом?
- (54) Як розрахувати довірчі інтервали для середніх значень та дисперсії?
- (55) Що називають статистичною гіпотезою?
- (56) Що розуміють під помилкою 1-го роду? 2-го роду?
- (57) Дайте означення статистичного критерія перевірки статистичної гіпотези.
- (58) Як побудувати критичну область для заданого критерія?
- (59) Наведіть алгоритм перевірки статистичних гіпотез?
- (60) Як перевірити гіпотезу про вид розподілу генеральної сукупності (нормальний, показниковий, біноміальний, рівномірний, Пуассона)?
- (61) Як перевірити гіпотезу про рівність двох середніх?
- (62) Як перевірити гіпотезу про рівність двох дисперсій?
- (63) Що називають багатовимірною вибіркою?
- (64) Як задати багатовимірну вибірку?
- (65) Як розрахувати середні значення багатовимірної вибірки?
- (66) Як розрахувати стандартні відхилення багатовимірної вибірки?
- (67) Яка формула для обчислення коефіцієнтів кореляції та коваріації?
- (68) Що називають простою лінійною вибірковою регресійною моделлю?
- (69) Як знайти її параметри лінійної регресійної моделі за методом найменших квадратів?
- (70) Як перевірити просту лінійну регресійну модель на адекватність?
- (71) Як перевіряють статистичну значимість параметрів лінійної регресійної моделі?
- (72) Які існують нелінійні регресійні моделі?
- (73) Опишіть методи зведення нелінійних моделей до лінійних (якщо це можливо).

- (74) Дайте означення міжгрупової та внутрішньогрупової дисперсії.
- (75) Опишіть загальний метод перевірки впливу фактора на ознаку способом порівняння дисперсій.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Москва: Высшая школа, 1977. — 497 с.
2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — Москва: Высшая школа, 1975. — 336 с.
3. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики / За ред Р.К. Чорнея. — К.: МАУП, 2003. — 328с.
4. *Шефтель З.П.* Теорія ймовірностей. — Київ: Вища школа, 1977. — 154 с.
5. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1963.
6. *Горбань С.Ф., Снижко Н.В.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: МАУП, 1999. — 168с.
7. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: ЮНИТИ, 2000.
8. Математическая статистика: Учебник. — М.: Высш. шк., 1981. — 371с.
9. *Турчин В.М.* Математична статистика. — К.: Вид центр "Академия 1999. — 240с.

Додаткова

10. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.Й.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: Вища школа, 1988. — 439с.
11. *Королюк В.С., Портенко Н.М., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.:Наука, 1985. — 640с.
12. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. — М., 1978.
13. *Скороход А.В.* Вероятность вокруг нас. — К.: Наукова думка, 1980. — 196 с.
14. *Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін.* Вища математика. Приклади і задачі: Посібник. — К.: Академія, 2002. — 624 с.
15. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожеевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.II. Учеб. Пособие для втузов. — М. Высшая школа, 1997. — 416с.
16. *Жалдак М.І., Кузьміна Н.І., Берлінська С.Ю.* Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. — Київ: Вища школа, 1995. — 351 с.
17. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1967. — 494с.

Д О Д А Т К И

Додаток 1. Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973	0,0
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918	0,1
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825	0,2
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697	0,3
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538	0,4
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352	0,5
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144	0,6
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920	0,7
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685	0,8
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444	0,9
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203	1,0
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965	1,1
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736	1,2
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518	1,3
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315	1,4
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127	1,5
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957	1,6
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804	1,7
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669	1,8
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551	1,9
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449	2,0
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0388	0,0379	0,0371	0,0363	2,1
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290	2,2
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229	2,3
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180	2,4
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139	2,5
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107	2,6
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081	2,7
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061	2,8
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046	2,9
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034	3,0
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025	3,1
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018	3,2
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013	3,3
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009	3,4
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006	3,5
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	3,6
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	3,7
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	3,8
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	3,9

Додаток 2. Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4680	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997