Math. Z. 163, 291–302 (1978)

Mathematische Zeitschrift

Einige endliche Faktorgruppen der Zopfgruppen

Joachim Assion

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld,
Kurt-Schumacher-Straße 6, D-4800 Bielefeld, Bundesrepublik Deutschland

Mit $Z_n(m)$ sei die Gruppe bezeichnet, die durch die Erzeugenden x_i mit $1 \leqq i \leqq n-1$ und die Relationen

$$x_i\, x_{i+1}\, x_i = x_{i+1}\, x_i\, x_{i+1} \qquad \text{für } 1 \leqq i \leqq n-2, \tag{1}$$

$$x_i\, x_j = x_j\, x_i \qquad \text{für } 1 \leqq i, j \leqq n-1 \text{ und } |i-j| \geqq 2, \tag{2}$$

$$x_1^m = 1 \tag{3}$$

definiert ist. Da die Relationen (1) und (2) bekanntlich die Zopfgruppe Z_n definieren, ist $Z_n(m)$ eine Faktorgruppe von Z_n.

Moore hat in [7] bewiesen, daß $Z_n(2)$ zur symmetrischen Gruppe vom Grad n isomorph ist. In [2] zeigte Coxeter insbesondere, daß $Z_3(3) \simeq SL(2,3)$, $Z_4(3) \simeq GU(3,2)$, $Z_5(3) \simeq Sp(4,3) \times C_3$ und $Z_n(3)$ unendlich ist für $n \geqq 6$.

Seien die Gruppen $S(n)$ und $U(n)$ wie folgt definiert: Ist n gerade, so sei $S(n) = Sp(n,3)$; ist n ungerade, so sei $S(n)$ zum Zentralisator einer projektiven symplektischen Transvektion in $PSp(n+1,3)$ isomorph. Ist $n \not\equiv 2(3)$, so sei $U(n) = GU(n,2)$; ist $n \equiv 2(3)$, so sei $U(n)$ zum Zentralisator einer projektiven unitären Transvektion in $PGU(n+1,2)$ isomorph.

Satz. *Sei $n \geqq 6$ eine natürliche Zahl. Ist $\overline{Z_n(3)}$ ein epimorphes Bild von $Z_n(3)$ mit $\langle \bar{x}_i; 1 \leqq i \leqq 4 \rangle \not\simeq Z_5(3)$, so ist $\overline{Z_n(3)}$ ein epimorphes Bild von $S(n-1)$ oder von $U(n-1)$.*

Ist $G(n)$ ein epimorphes Bild von $Z_n(3)$, das den Voraussetzungen des Satzes genügt, so ist $\langle \bar{x}_i;\ 1 \leqq i \leqq 4 \rangle$ nach [2] ein epimorphes Bild von $Sp(4,3)$ oder von $GU(4,2)$. Ist etwa im ersten Fall n gerade, so ist nach Induktion die Gruppe $H = \langle \bar{x}_i;\ 1 \leqq i \leqq n-2 \rangle$ ein epimorphes Bild von $Sp(n-2,3)$, und es wird ein Normalteiler von $G(n)$ konstruiert, der H in $G(n)$ komplementiert; ist n ungerade, so wird gezeigt, daß $\bar{x}_1^{G(n)}$ die Voraussetzungen eines Satzes von Stellmacher [9] bzw. von Aschbacher und Hall [1] erfüllt. Um die Struktur von gewissen zur Induktion benötigten Gruppen (vgl. (2.3), (2.4(1))) zu bestimmen, wurden mit dem Computer des Rechenzentrums der Universität Bielefeld verschiedene Nebenklassenabzählungen nach einem Programm von Mehl [6] durchgeführt.

0025-5874/78/0291/$02.40

Die Bezeichnungen stimmen mit denen in [5] überein. Sind A und B Untermengen einer Gruppe G, so wird mit $A \sim B$ bezeichnet, daß A und B in G konjugiert sind; für eine Primzahl p sei $\mathbf{O}_p(G)$ der größte Normalteiler der endlichen Gruppe G mit p-Potenzordnung. Ist $(i \cdot j \cdot k)$ die Nummer einer Aussage, so ist $(i \cdot j)$ Teil der Voraussetzungen dieser Aussage.

1. Die Gruppen $S(n)$ und $U(n)$

(1.1) *Voraussetzung.* Sei m eine natürliche Zahl. Sei $(\ ,\ )$ eine nicht ausgeartete symplektische Bilinearform auf einem $2m$-dimensionalen Vektorraum V_m über $GF(3)$. Sei $T_m := \{t(v);\ x\,t(v) := x + (x, v)\, v$ für x in $V_m,\ 0 \neq v \in V_m\}$.

Mit einfachen Rechnungen beweist man den folgenden Hilfssatz.

(1.1.1) **Hilfssatz.** *Seien $t(v)$ und $t(w)$ Elemente von T_m. Dann gilt:*

(a) $t(v)^3 = 1 \neq t(v) \in Sp(2m, 3)$;

(b) *es ist* $t(v)^g = t(v\,g)$ *für* g *aus* $Sp(2m, 3)$;

(c) $t(v) = t(w)$ *ist äquivalent mit* $\langle v \rangle = \langle w \rangle$;

(d) *aus* $(v, w) = 0$ *folgt* $t(v)\,t(w) = t(w)\,t(v)$;

(e) *aus* $(v, w) \neq 0$ *folgt* $t(v)\,t(w)\,t(v) = t(w)\,t(v)\,t(w)$ *und* $x(t(v)\,t(w))^3 = x + (v, w)\,((x, w)\,v - (x, v)\,w)$ *für alle* x *aus* V_m.

(1.1.2) **Definition.** Sei $\overset{m}{\underset{i=1}{\perp}} \langle x_i, y_i \rangle$ eine hyperbolische Zerlegung von V_m. Setze $t_1 := t(x_1)$, $t_{2i} := t(y_i)$ und $t_{2j+1} := t(x_j + x_{j+1})$ für $1 \leqq i \leqq m$ bzw. für $1 \leqq j \leqq m-1$. Setze ferner $S(r) := \langle t_i;\ 1 \leqq i \leqq r \rangle$ für $r \in \{2m-1, 2m\}$.

(1.1.3) **Hilfssatz.** *Sei* $\overline{}$ *der natürliche Homomorphismus von* $Sp(2m, 3)$ *auf* $PSp(2m, 3)$. *Dann ist* $S(2m) = Sp(2m, 3)$ *und* $S(2m-1) \simeq \mathbf{C}_{PSp(2m, 3)}(\overline{t(x_m)})$.

Beweis. Sei n minimal, so daß die Behauptung für $S(n)$ falsch ist. Dann ist $n \geqq 3$ nach [2] und (1.1.1).

Wäre n ungerade, so wäre $S(n-1) = Sp(n-1, 3)$. Nach (1.1.1) ist $S(n) \leqq \mathbf{C}_{Sp(2m, 3)}(t(x_m))$ für $n+1 = 2m$. Da $S(n-1)$ irreduzibel auf der Zentrumsfaktorgruppe von $\mathbf{O}_3(\mathbf{C}_{Sp(2m, 3)}(t(x_m)))$ operiert, folgte $t_n\,t(x_m)^a \in S(n-1)$ für ein $a \in \{0, 1, -1\}$, und insbesondere würde t_{2m} von diesem Element zentralisiert werden, was jedoch nach (1.1.1) nicht der Fall ist.

Also ist $n = 2m$ und $S(n-1) \simeq \mathbf{C}_{PSp(n, 3)}(\overline{t(x_m)})$. Nun ist dieser Zentralisator eine maximale Untergruppe von $PSp(n, 3)$, der nach (1.1.1) das Element $\bar{t}_n$ nicht enthält. Damit folgt $S(n) = Sp(n, 3)$.

(1.1.4) **Hilfssatz.** *Sei* $M = \mathbf{O}_3(S(2m-1))$. *Ist* $x \in M \setminus \mathbf{Z}(M)$, *so gibt es Transvektionen* a *und* b *in* $S(2m-1)$ *mit* $x = a^{-1} b$, $[a, b] = 1$ *und* $a \sim b$ *in* $S(2m-1)$.

Beweis. Sei K ein Komplement von M in $S(2m-1)$ nach (1.1.3). Setze $\bar{M} = M/\mathbf{Z}(M)$. Dann gibt es eine Transvektion c in K mit $\bar{y}^c = \bar{y}\,\bar{x}^{s(\bar{y})}$ für alle $\bar{y}$ in $\bar{M}$, wobei $s(\bar{y}) \in \{0, 1, -1\}$ passend zu wählen ist. Wähle $d, e \in M$ mit $s(\bar{d}) \neq 0$ und $[d, c]^e = x^{s(\bar{d})}$. Setze $a = (c^{de})^{s(\bar{d})}$ und $b = (c^e)^{s(\bar{d})}$. Aus $[a, b] \neq 1$ würde $\langle a, b \rangle \simeq Sp(2, 3)$ folgen nach (1.1.1). Aber $\langle a, b \rangle$ hat einen nichttrivialen Schnitt mit M.

(1.2) *Voraussetzung.* Sei m eine natürliche Zahl. Sei (,) eine nicht ausgeartete hermitesche Sesquilinearform auf einem m-dimensionalen Vektorraum V_m über $GF(4)$. Wähle a in $GF(4)\setminus GF(2)$ und setze $T_m := \{t(v);\ x\,t(v) := x + a(x,v)\,v$ für $x \in V_m$, $v \in V_m$ mit $(v,v)=1\}$.

Dann gilt der folgende Hilfssatz.

(1.2.1) **Hilfssatz.** *Seien $t(v)$ und $t(w)$ in T_m. Dann gilt:*

(a) $t(v)^3 = 1 \neq t(v) \in GU(m,2)$;
(b) *es ist* $t(v)^g = t(v\,g)$ *für* g *aus* $GU(m,2)$;
(c) $t(v)=t(w)$ *ist äquivalent mit* $\langle v\rangle = \langle w\rangle$;
(d) *aus* $(v,w)=0$ *folgt* $t(v)\,t(w)=t(w)\,t(v)$;
(e) *aus* $(v,w)\neq 0$ *und* $\langle v\rangle \neq \langle w\rangle$ *folgt* $t(v)\,t(w)\,t(v)=t(w)\,t(v)\,t(w)$ *und* $x(t(v)\,t(w))^3 = x + (x, v+(v,w)\,w)\,(v+(v,w)\,w)$ *für alle* $x \in V_m$.

(1.2.2) **Definition.** Sei $m \equiv 1(3)$ und $m \geqq 4$. Sei $\{x_i;\ 1 \leqq i \leqq m\}$ eine Orthonormalbasis von V_m. Setze $t_1 := t(x_1)$, $t_2 := t(x_1+x_2+x_3)$, $t_{3i} := t(x_{3i-1})$, $t_{3i+1} := t(x_{3i-1}+x_{3i}+x_{3i+1})$ und $t_{3i+2} := t(x_{3i+1}+x_{3i+2}+x_{3i+3})$ für $1 \leqq i \leqq \frac{1}{3}(m-1)$. Setze ferner $U(r) := \langle t_i;\ 1 \leqq i \leqq r\rangle$ für $m-2 \leqq r \leqq m$.

(1.2.3) **Hilfssatz.** *Sei* $\bar{\ }$ *der natürliche Homomorphismus von* $GU(m-1,2)$ *auf* $PGU(m-1,2)$. *Dann ist* $U(m-2) \simeq \mathbf{C}_{PGU(m-1,2)}(\bar{u}_m)$, *wobei* u_m *aus* $GU(m-1,2)$ *ist mit* $x\,u_m := x + (x, x_{m-2}+x_{m-1})\,(x_{m-2}+x_{m-1})$ *für alle* x *in* V_m, *während* $U(m-i) = GU(m-i,2)$ *ist für* $0 \leqq i \leqq 1$.

Beweis. $GU(3,2)$ ist zu $S(3)$ isomorph, der Zentralisator von $\bar{u}_m$ in $PGU(m-1,2)$ bzw. der Zentralisator von $\overline{t(x_m)}$ in $PGU(m,2)$ sind jeweils maximale Untergruppen, und man kann wie in (1.1.3) schließen.

2. Beweis des Satzes

(2.1) **Hilfssatz.** *Die Gruppe H sei erzeugt von den Elementen a, b und c der Ordnung 3, die den folgenden Relationen genügen:*

$$a\,b\,a(b\,a\,b)^{-1} = [a,c] = (b\,c)^3 = (b^{-1}\,c)^3 = 1.$$

Ist $\langle t\rangle = \mathbf{Z}(\langle a,b\rangle)$, *so folgt* $(c\,c^t)^3=1$, $L=\langle b,a,b^c\rangle$ *ist eine Faktorgruppe von* $S(3)/\mathbf{Z}(S(3))$, *und* $H = L \times \langle c\,c^t\rangle$.

Beweis. Nach [2] ist L eine Faktorgruppe von $S(3)$. Sei o.B.d.A. $b^c \neq b$. Wegen $b\,b^c b^{c^{-1}} = 1$ und $b^{ct} = b^{c^{-1}}$ folgt $L \trianglelefteq H$ und $\mathbf{Z}(L)=1$. Da

$$c^{tc} = c^{ba^{-1}bc} = c^{ba^{-1}(bcb)^{-1}} = c^{ba^{-1}(c^{-1})^b b} = c^{ba^{-1}b} = c^t$$

ist, folgt $(c\,c^t)^3=1$ und $c\,c^t \in \mathbf{Z}(H)$. Schließlich ist

$$\begin{aligned} c^t\,c^{-1} &= (c^t\,c)^b\,c = c^{bt}\,c^{-1}\,c^{-1}\,c^b = c^{b^{-1}a}(c^{-1})^a(b^{-1}\,b^c)^{-1} \\ &= c^{b^{-1}a}((c^{-1})^{b^{-1}}\,b^{-1}\,b^c)^a(b^{-1}\,b^c)^{-1} = (b^{-1}\,b^c)^a(b^{-1}\,b^c)^{-1} \end{aligned}$$

ein Element von L.

(2.2) **Satz.** *Sei $m \geqq 5$. Die Gruppe G_m sei definiert durch die Erzeugenden $x(i)$, $1 \leqq i \leqq m$, und die Relationen*

$$x(i)\,x(i+1)\,x(i) = x(i+1)\,x(i)\,x(i+1) \quad \text{für } 1 \leqq i \leqq m-1,$$
$$x(i)\,x(j) = x(j)\,x(i) \quad \text{für } 1 \leqq i, j \leqq m \text{ und } |i-j| \geqq 2,$$
$$x(1)^3 = 1$$

und

$$x(3)\,x(1)\,x(1)^{(x(2)x(3))^3}\,x(1)^{(x(2)x(3))^3(x(3)x(4))^3} = 1.$$

Dann ist G_m zu $S(m)$ isomorph.

Beweis. Setze $t(i) := (x(i)\,x(i+1))^3$ für $1 \leqq i \leqq m-1$ und $H(i,j) := \langle x(k);\ i \leqq k \leqq j \rangle$ für $1 \leqq i \leqq j \leqq m$. Sei m minimal, so daß die Behauptung falsch ist.

(1) *$H(i, i+3)$ ist ein epimorphes Bild von $S(4)$ für $1 \leqq i \leqq m-3$.*

Beweis. Nach [2] und Voraussetzung gilt (1) für $i=1$. Insbesondere ist

$$(+) \quad x(2)^{t(3)} = x(4)^{t(2)} \quad \text{und} \quad x(2)\,x(4)\,x(4)^{t(2)}\,x(4)^{t(2)t(1)} = 1.$$

Mit Induktion genügt es, (1) für $i=2$ zu zeigen.

Setze $z = x(4)\,x(2)\,x(4)^{t(2)}\,x(4)^{t(2)t(4)}$. Nach [2] ist $z^3 = 1$ und $z \in \mathbf{Z}(H(2,5))$. Es ist $z=1$ zu zeigen. Mit $(+)$ folgt $z^{t(1)} = z^{-1}$,

$$x(4)^{t(2)t(1)t(4)t(3)t(4)} = z^{-1}\,x(2)$$

und

$$x(5)^{t(2)t(1)t(4)t(3)t(4)} = x(3),$$

und aus

$$z\,x(2)\,x(3)\,x(2) = z^{-1}\,x(3)\,x(2)\,x(3)$$

ergibt sich $z^2 = 1$.

(2) *Sei $z(1) := x(1)$ und $z(i)^{-1} := x(2i-1)\,z(i-1)\,z(i-1)^{t(2i-2)}$ für $2 \leqq i \leqq \frac{1}{2}(m+1)$. Dann ist $z(i) \in \mathbf{Z}(H(1, 2i-1))$ für alle i, es gilt*

$$z(i) = z(i-1)^{t(2i-2)t(2i-1)}, \qquad z(i)\,x(2i)\,z(i) = x(2i)\,z(i)\,x(2i)$$

für $1 \leqq i \leqq m/2$, und $\langle z(j), H(2j, 2j+2) \rangle$ ist ein epimorphes Bild von $S(4)$ für $1 \leqq j \leqq \frac{1}{2}(m-2)$.

Beweis. Für $i < m/2$ ist (2) nach Induktion über m richtig.

Ist $i > m/2$, so ist $m = 2r+1$, $i = r+1$, und zu zeigen ist $z(r+1) \in \mathbf{Z}(G_m)$. Nun ist $z(r) \in \mathbf{Z}(H(1, 2r-1))$ und $z(r)\,x(2r)\,z(r) = x(2r)\,z(r)\,x(2r)$, und nach Definition von $z(r+1)$ sind $H(1, 2r-2)$ und $H(2r, 2r+1)$ in $\mathbf{C}(z(r+1))$ enthalten. Da

$$\begin{aligned}[x(2r-1), z(r+1)^{-1}] &\sim [x(2r-1), z(r)^{t(2r)}] \\ &\sim [x(2r+1)^{t(2r-1)}, z(r-1)^{t(2r-2)t(2r-1)}] \\ &\sim [x(2r+1), z(r-1)] = 1\end{aligned}$$

ist, folgt $z(r+1) \in \mathbf{Z}(G_m)$.

Also ist $i=m/2$, $j=i-1$, $z(i-1)=z(i-2)^{t(2i-4)t(2i-3)}$ und $x(2i-2)z(i-1)x(2i-2) = z(i-1)x(2i-2)z(i-1)$; nach (1) ist

$$(+) \quad x(2i-2)\,x(2i)\,x(2i)^{t(2i-2)}\,x(2i)^{t(2i-2)t(2i-3)} = 1.$$

Sei $\langle t \rangle = \mathbf{Z}(\langle z(i-1), x(2i-2)\rangle)$ und

$$z = x(2i-2)\,x(2i)\,x(2i)^{t(2i-2)}\,x(2i)^{t(2i-2)t}.$$

Konjugiert man $(+)$ mit $t\,t(2i-2)$, so erhält man

$$1 = z\,x(2i)^{-1}\,x(2i)^{t(2i-2)t(2i-3)t\,t(2i-2)}.$$

Sei nun $y^{-1} = x(2i-3)x(2i-1)x(2i-1)^{t(2i-3)}$. Nach (1) folgt $y\,x(2i)\,y = x(2i)\,y\,x(2i)$. Da y mit $z(i-1)$ vertauschbar ist, liegt y in $\mathbf{Z}(\langle H(2i-3, 2i-1), z(i-1)\rangle)$, und y ist mit $t(2i-2)\,t(2i-3)\,t\,t(2i-2)$ vertauschbar. Wegen

$$[y, z(i-1)^{t(2i-2)t(2i-1)}] \sim [x(2i-3), z(i-1)] = 1$$

ist y nach (2.3.1) auch mit z vertauschbar, und aus

$$(x(2i)\,z^{-1})\,y(x(2i)\,z^{-1}) = y(x(2i)\,z^{-1})\,y$$

folgt $z=1$. Also ist $\langle z(i-1), H(2i-2, 2i)\rangle$ ein epimorphes Bild von $S(4)$.

(3) *m ist ungerade.*

Beweis. Sei $m=2r$. Aus (2) folgt $z(r) \in \mathbf{Z}(H(1, m-1))$ und $z(r)x(m)z(r) = x(m)z(r)x(m)$. Also ist $H(1, m-1)$ zu $S(m-1)$ isomorph und $\mathbf{C}_{H(1,m-1)}(x(m)) = H(1, m-2)$.

Setze $D_1 = x(m)^{H(1,m-1)}$, $D_2 = x(m-1)^{H(1,m-2)} \dot\cup \{z(r)\}$, $D_3 = x(m-2)^{H(1,m-2)}$ und $D = D_1 \dot\cup D_2 \dot\cup D_3$. Dann folgt $2|D| = 3^m - 1$, $D^{x(i)} \subseteq D$ für $1 \leqq i \leqq m-1$, $D_3 \subseteq \mathbf{C}(x(m))$ und $D_2^{x(m)} \subseteq D_1$.

Setze $E_1 = x(m)^{D_2} \cup x(m)^{D_2^{-1}}$ und $E_2 = x(m)^T$, wobei $T = t^{H(1,m-1)}$ und $\langle t \rangle = \mathbf{Z}(H(1, m-2))$ ist. Dann folgt $E_1 \cup E_2 \subseteq D_1$ und $E_1^{x(m)} \subseteq D$.

Seien $y(1), y(2) \in D_2$, seien $a, b \in \{1, -1\}$ mit $y(1)^a\,y(2)^{-b} \in \mathbf{C}(x(m))$. Aus $y(2) = z(r) \neq y(1)$ würde $x(m) \in H(1, m-1)$ folgen, was $x(m) \notin \mathbf{C}(z(r))$ widerspräche. Also folgt $y(i) = x(m-1)^{c(i)}$ mit $c(i) \in H(1, m-2)$, und $x(m)^{b-a}\,c(1)\,c(2)^{-1}$ zentralisiert $x(m-1)$. Aus $a \neq b$ folgte dann $x(m) \in H(1, m-1)$, was nicht der Fall ist. Also ist $a=b$ und $y(1)=y(2)$. Damit folgt $|E_1| = 2\,|D_2|$.

Sind $y(1), y(2) \in T$ mit $y(1)\,y(2) \in \mathbf{C}(x(m))$, so folgt $y(1)\,y(2) \in \mathbf{O}_3(H(1, m-1)) \cap \mathbf{C}(x(m)) = 1$, und $|E_2| = |T|$, so daß $|E_1| + |E_2| = |D_1|$ ist.

Zu $t \neq u \in T$ gibt es ein $a \in \mathbf{O}_3(H(1, m-1))$ mit $u\,a = t$. Nach (1.1.4) gibt es dann $y(1), y(2) \in x(m-1)^{H(1,m-1)}$ mit $a = y(1)^{-1}\,y(2)$ und $[y(1), y(2)] = 1$. Wäre etwa $y(1) \in H(1, m-2)$, so folgte $y(2) \in x(m-1)^{H(1,m-2)}$ und $y(1)\,y(2)^{-1} = a^{-1} = a^t = y(1)^{-1}\,y(2)^t$, und $(y(1)\,y(2))^{-1} \in x(m-1)^{H(1,m-2)}$. Also wäre $y(1)\,(y(2)^{-1}\,x(m)\,y(2)^{-1})$

$=y(1)^{-1}(x(m)\,y(2)^{-1}x(m))$, und $y(1)=(y(2)\,x(m))^{-1}$, was nicht geht. Ebenso folgt $y(2)\notin H(1,m-2)$. Damit ist $\langle y(1), x(m), y(2)\rangle$ ein epimorphes Bild von $S(3)$, woraus $x(m)^u=x(m)^{y(1)y(2)^{-1}}\in \mathbf{C}(x(m))$ folgt. Also ist $E_2\subseteq \mathbf{C}(x(m))$, und $E_1\cap E_2$ ist leer.

Damit ist D eine Konjugiertenklasse von G_m. Nach [8; 15.1.10] ist G_m endlich. Wegen obiger Zerlegung von D folgt, daß das Paar (G_m, D) die Voraussetzungen von [1; Theorem] erfüllt. Ist A der maximale auflösbare Normalteiler von G_m, so ist $A/\mathbf{Z}(G_m)$ eine $\{2,3\}$-Gruppe, und aus der Mächtigkeit von D folgt, daß $A/\mathbf{Z}(G_m)$ eine 2-Gruppe ist. Aus $|x(1)^A|\geqq 4$ folgte $|D|\geqq 12\,|(D\cap H(1,m-2))|$, was $m=2$ implizierte. Also ist $A=\mathbf{Z}(G_m)$, und $G_m/\mathbf{Z}(G_m)$ ist nach [1] zu $PSp(m,3)$ isomorph. Da G_m von D erzeugt wird, folgt $[G_m:G_m']\leqq 3$ und $\mathbf{Z}(G_m)=Z_1\times Z_2$ mit $\Sigma_2\geqq Z_1=\mathbf{Z}(G_m)\cap G_m'$ nach [4] und $Z_2\leqq C_3$. Nach Voraussetzung gibt es Elemente $y(i)$ in D mit $(y(1)\,y(2)\,y(3))^{-1}\in D$, so daß $Z_2=1$ ist. Nach (1.1.3) wird $S(m)$ von Elementen erzeugt, die den Voraussetzungen des Satzes genügen. Damit ist G_m zu $S(m)$ isomorph.

(4) *Nach* (3) *ist* $m=2r+1$. *Setze* $y(r):=x(m)$ *und* $y(i)^{-1}:=x(2i+1)\,y(i+1)\,y(i+1)^{t(2i+1)}$ *für* $r-1\geqq i\geqq 0$. *Dann ist* $y(i)\in \mathbf{Z}(H(2i+1,m))$ *und* $y(i)=y(i+1)^{t(2i+1)t(2i)}$ *für* $0\leqq i\leqq r-1$, *es ist* $y(i)\,x(2i)\,y(i)=x(2i)\,y(i)\,x(2i)$ *für* $1\leqq i\leqq r$, *und* $\langle y(j), H(2j-2,2j)\rangle$ *ist ein epimorphes Bild von* $S(4)$ *für* $2\leqq j\leqq r$.

Beweis. Nach (1) ist $H(m-3,m)$ ein epimorphes Bild von $S(4)$, und man kann wie in (2) schließen.

(5) *Die Menge* $\{z(i), y(j);\ 1\leqq i\leqq r+1,\ 0\leqq j\leqq r\}$ *besteht aus paarweise vertauschbaren Elementen.*

Beweis. Ist $i<j$, so folgt $[z(i),z(j)]=1=[y(j),y(i)]$ aus (2) bzw. aus (4). Für $i\leqq j$ gilt trivialerweise $[z(i),y(j)]=1$.

Nach (2) ist $[z(i+1),y(i)]=1$ für $i=r$, für $i<r$ folgt nach (2) und (4)

$$[z(i+1),y(i)]\sim[z(i)^{t(2i+1)t(2i)},y(i+1)]\sim[z(i),y(i+1)^{t(2i)}]=1.$$

Ist $i\geqq j+2$, also $2i-3\geqq 2j+1$, so folgt

$$[z(i),y(j)]\sim[z(i-1),y(j)]=1$$

nach Induktion, denn $[z(1),y(j)]=1$ für alle j nach (4).

(6) G_m *ist kein Gegenbeispiel.*

Beweis. Setze $M(i)=\mathbf{O}_3(\langle z(i),x(2i),y(i)\rangle)$ für $1\leqq i\leqq r$. Dann folgt $M(i)^{t(2i)t(2i+1)t(2i)}=M(i+1)$ nach (2) und (4), und $M(i)'=M(j)'\leqq \mathbf{Z}(G_m)$ für $1\leqq i,j\leqq r$.

Setze $N(1)=M(1)$ und $N(i+1)=N(i)\,M(i+1)$ für $1\leqq i\leqq r-1$. Aus (5) folgt $M(i+1)\leqq \mathbf{C}(N(i))$ für $1\leqq i\leqq r-1$, und $M(i+1)'=M(i+1)\cap N(i)$ für $1\leqq i\leqq r-1$.

Nach Definition von $M(i)$, nach (2) und (4) folgt $x(j)\in \mathbf{N}(M(i))$ für $j\notin\{2i-1,2i+1\}$ und $x(2i-1), x(2i+1)\in \mathbf{C}(\langle y(i),z(i)\rangle)$. Nach (2) ist $z(i)^{t(2i-1)}=(x(2i-1)\,z(i-1)\,z(i))^{-1}$, und wegen $y(i-1)^{-1}=x(2i-1)\,y(i)\,y(i)^{t(2i-1)}$ folgt, daß

$$\begin{aligned}(y(i)^{-1}z(i))^{t(2i-1)}&=y(i-1)\,x(2i-1)\,y(i)\,(z(i)\,z(i-1)\,x(2i-1))^{-1}\\&=(y(i-1)\,z(i-1)^{-1})\,(y(i)\,z(i)^{-1})\end{aligned}$$

ein Element von $N(i)$ ist. Nun ist $\langle x(2i), y(i)^{-1} z(i)\rangle / M(i)'$ ein epimorphes Bild einer extraspeziellen Gruppe vom Exponenten 3 und der Ordnung 27, und nach (2.1) folgt

$$(y(i)^{-1} z(i))^{x(2i)x(2i-1)}$$
$$\equiv (y(i)^{-1} z(i))^{-1} (y(i)^{-1} z(i))^{x(2i)} (y(i)^{-1} z(i))^{-1} (y(i) z(i)^{-1})^{t(2i-1)} \pmod{M(i)'},$$

woraus $x(2i-1) \in \mathbf{N}(N(i))$ folgt. Ebenso folgt $x(2i+1) \in \mathbf{N}(N(i))$.

Also ist $N(r) \trianglelefteq G_m = N(r) H(1, m-1)$, $H(1, m-1)$ ist ein epimorphes Bild von $S(m-1)$, nach (1.1.3) erfüllt $S(m)$ die Voraussetzungen des Satzes, und G_m ist zu $S(m)$ isomorph.

(2.3) **Hilfssatz.** *Die Gruppe H sei definiert durch die Erzeugenden a, b, c und d und die folgenden Relationen:*

$$a^3 = [a, c] = [d, c] = 1,$$
$$a\,b\,a = b\,a\,b, \qquad a\,d\,a = d\,a\,d, \qquad b\,c\,b = c\,b\,c,$$
$$b^{a^i}\,d\,b^{a^i} = d\,b^{a^i}\,d \qquad \text{für } 0 \leqq i \leqq 2.$$

Ist $N = \langle (a^{-1} d)^H \rangle$ und $U = \langle a, b, c \rangle$, so ist U zu $S(3)$ isomorph, und N ist ein zentrales Produkt dreier Quaternionengruppen.

Beweis. Nach Definition von N und [2] folgt $U \simeq H/N \simeq S(3)$. Eine Nebenklassenabzählung liefert $[H : U] = 2^7$.

Sei $N_1 = \langle \mathbf{O}_2(A_i);\ 1 \leqq i \leqq 3 \rangle$, wobei $A_1 = \langle a, d \rangle$, $A_2 = A_1^{t_1 t_2}$, $A_3 = A_1^{t_2 t_1}$, $t_1 = (a\,b)^3$ und $t_2 = (b\,c)^3$ ist. Dann ist $[A_i, A_j] = 1$ für $i \neq j$, und N_1 ist ein zentrales Produkt von Quaternionengruppen.

(2.4) **Satz.** *Sei $m \geqq 5$. Die Gruppe G_m sei definiert durch die Erzeugenden $x(i)$, $1 \leqq i \leqq m$, und die Relationen*

$$x(i)\,x(i+1)\,x(i) = x(i+1)\,x(i)\,x(i+1) \qquad \text{für } 1 \leqq i \leqq m-1,$$
$$x(i)\,x(j) = x(j)\,x(i) \qquad \text{für } 1 \leqq i, j \leqq m \text{ und } |i-j| \geqq 2,$$
$$x(1)^3 = 1$$

und

$$((x(1)\,x(2))^3\,(x(3)\,x(4))^3)^3 = 1.$$

Dann ist G_m zu $U(m)$ isomorph.

Beweis. Setze $t(i) := (x(i)\,x(i+1))^3$ für $1 \leqq i \leqq m-1$ und $H(i, j) := \langle x(k);\ i \leqq k \leqq j \rangle$ für $1 \leqq i \leqq j \leqq m$. Sei m minimal, so daß die Behauptung falsch ist.

(1) *Es ist $m \geqq 6$.*

Beweis. Eine Nebenklassenabzählung ergibt $[G_5 : H(1, 4)] = 2^9$. Nach [2] und Voraussetzung folgt $|G_5| = |U(5)|$, und nach (1.2.3) läßt sich $U(5)$ von Elementen erzeugen, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Also ist G_5 zu $U(5)$ isomorph.

(2) *Setze* $y(0):=x(1)$, $y(i):=y(i-1)^{t(i+1)}$ *für* $i\equiv 1(3)$, $y(i):=x(i+1)$ *für* $i\equiv 2(3)$ *und* $y(i):=y(i-3)^{t(i-1)t(i)}$ *für* $i\equiv 0(3)$, *wobei* $1\leqq i\leqq m-1$ *für* $m\not\equiv 2(3)$ *und* $1\leqq i\leqq m-2$ *für* $m\equiv 2(3)$ *ist. Dann gilt:*

(a) $y(i)\in H(1,i+1)$ *für* $i\not\equiv 1(3)$ *und* $y(i)\in H(1,i+2)$ *für* $i\equiv 1(3)$;
(b) *ist* $i\equiv 0(3)$, *so ist* $H(1,i)\times H(i+3,m)\leqq \mathbf{C}(y(i))$, *und* $\langle y(i), x(i+1), x(i+2)\rangle$ *ist ein epimorphes Bild von* $K:=\langle a,b,d\rangle$ *mit* a, b *und* d *aus* (2.3) (*vgl.* [1; 3.3]);
(c) *ist* $i\equiv 1(3)$, *so ist* $H(1,i)\times\langle x(i+2)\rangle\times H(i+4,m)\leqq \mathbf{C}(y(i))$ *und* $x(i+j)\,y(i)\,x(i+j)=y(i)\,x(i+j)\,y(i)$ *für* $j\in\{1,3\}$;
(d) *es ist* $[y(i),y(j)]=1$ *für alle* i *und* j.

Beweis. (a) folgt direkt aus der Definition der $y(i)$.

Sei $i\equiv 0(3)$ und $i\neq 0$. Nach Induktion ist $\langle y(i-3), H(i-2,i-1)\rangle$ ein epimorphes Bild von K, und nach (1) ist $\langle y(i-3), H(i-1,i+2)\rangle$ ein epimorphes Bild von $U(5)$. Daraus folgt (b).

Sei $i\equiv 1(3)$. Dann ist $H(1,i-1)\,H(i+4,m)\leqq \mathbf{C}(t(i+1))\cap \mathbf{C}(y(i-1))\leqq \mathbf{C}(y(i))$. Ist $\langle u\rangle=\mathbf{Z}(\langle y(i-1), x(i+1)\rangle)$, so werden $x(i)$ und $x(i+3)$ von u zentralisiert, und aus $y(i)=x(i+2)^u$ folgt (c).

Für $i+2<j$ ist (d) trivial. Ist $i+2=j$, so kann man $i\equiv 1(3)$ nach (a) annehmen, denn nach (b) und (c) wird $H(1,i+1)$ von $y(j)$ zentralisiert. Damit folgt $x(j)\in \mathbf{C}(y(j))$ nach (b), und $y(i)=y(j)^{t(j)}\in \mathbf{C}(y(j))$. Ist $i+1=j$, so folgt $j\not\equiv 2(3)$, also $H(1,j)\leqq \mathbf{C}(y(j))$ nach (b) und (c), und aus $i\not\equiv 1(3)$ folgt $y(i)\in \mathbf{C}(y(j))$ nach (a). Also gilt (d).

(3) *Setze* $\langle u(3i)\rangle:=\mathbf{Z}(\langle y(3i), x(3i+2)\rangle)$ *für* $0\leqq 3i\leqq m-2$. *Dann ist* $u(3i)\in \mathbf{Z}(H(1,3i+2))\cap \mathbf{Z}(\langle y(3i), x(3i+1)\rangle)$.

Beweis. Aus (2.a, b) folgt $u(3i)\in \mathbf{Z}(H(1,3i+2))$.

Nach (1) ist $t(1)=u(0)\in\langle y(3), x(4)\rangle$, und nach (2.b) ist

$$\langle x(3i+2), y(3i)\rangle^{t(3i+2)t(3i+3)t(3i+2)}=\langle x(3i+4), y(3i+3)\rangle.$$

Da $\langle y(3i), H(3i+2,3i+4)\rangle$ nach (1) ein epimorphes Bild von $U(4)$ ist, wird $t(3i+2)\,t(3i+3)\,t(3i+2)$ von $u(3i)$ zentralisiert.

(4) *Es ist* $m\not\equiv 0(3)$.

Beweis. Sei $m\equiv 0(3)$. Dann ist $H(1,m-1)$ ein epimorphes Bild von $U(m-1)$, nach (2.b) und [2] ist $u(m-3)$ nicht mit $x(m)$ vertauschbar, woraus $H(1,m-1)\simeq U(m-1)$ nach (3) und $\mathbf{C}_{H(1,m-1)}(x(m))=H(1,m-2)$ folgt.

Setze $D_1=x(m)^{H(1,m-1)}$, $D_2=x(m-1)^{H(1,m-2)}$, $D_3=x(m-2)^{H(1,m-2)}$ und $D=D_1\,\dot\cup\, D_2\,\dot\cup\, D_3$. Dann folgt $3\,|D|=2^{m-1}(2^m-(-1)^m)$, $D^{x(i)}\subseteq D$ für $1\leqq i\leqq m-1$, $D_3\subseteq \mathbf{C}(x(m))$ und $D_2^{x(m)}\subseteq D_1$.

Nach dem Satz von Witt hat $H(1,m-2)$ genau vier nichttriviale Bahnen auf $\mathbf{O}_2(H(1,m-1))$: $B_1=a^{H(1,m-2)}$, $B_2=u(m-3)\,B_1$, $B_3=v^{H(1,m-2)}$ und $B_4=u(m-3)\,B_3$, wobei a und v Elemente von $\mathbf{O}_2(H(1,m-1))$ sind mit $v^2=u(m-3)\neq a\neq 1=a^2$. Sei etwa $v=y(m-3)^{-1}\,x(m-1)$. Dann folgt $x(m)^{v^b}\,x(m)\,x(m)^{v^b}=x(m)\,x(m)^{v^b}\,x(m)$ und $x(m)^{v^b x(m)}\in D_1\cup D_2$ für $b\in\{1,-1\}$, und $x(m)^{(B_3\cup B_4)x(m)}\subseteq D_1\cup D_2$. Wegen $t(m-3)^{t(m-1)}=t(m-1)^{t(m-3)}$ nach (1) ist

$$y(m-5)=y(m-3)^{t(m-3)}\in\langle y(m-3), x(m-1), x(m), x(m-1)^{t(m-3)}\rangle=L,$$

und nach (2.c) und (3) ist L ein epimorphes Bild von $U(4)$. In L rechnet man dann nach, daß es eine Involution a in $\mathbf{O}_2(\mathbf{C}_L(u(m-3))) \leqq \mathbf{O}_2(H(1, m-1))$ gibt mit $x(m)^a x(m) x(m)^a = x(m) x(m)^a x(m)$, $x(m)^{a x(m)} \in D_1$ und $x(m)^{a u(m-3)} \in \mathbf{C}(x(m)) \setminus \langle x(m) \rangle$. Damit folgt $x(m)^{(B_1 \cup B_2) x(m)} \subseteq D_1$. Schließlich ist $x(m)^{u(m-3)}$ mit $x(m)$ vertauschbar. Also ist $D_1^{x(m)} \subseteq D_1 \cup D_2$.

Damit ist D eine Konjugiertenklasse von G_m, die den Voraussetzungen von [1; Theorem] genügt, denn nach [8; 15.1.10] ist G_m endlich. Sei A der maximale auflösbare Normalteiler von G_m. Aus [1] folgt $G_m/A \simeq PGU(s, 2)$ mit $s \geqq m-2 \geqq 4$ oder $m=6$, denn nach (2.b) gibt es für $m>6$ in G_m/A zu K isomorphe Untergruppen, die von Elementen aus DA/A erzeugt werden. Da $A/\mathbf{Z}(G_m)$ eine $\{2, 3\}$-Gruppe ist, folgt nun in beiden Fällen aus der Mächtigkeit von D, daß $A = \mathbf{Z}(G_m)$ ist, und $G_m/\mathbf{Z}(G_m) \simeq PGU(m, 2)$ nach [1]. Ist Z die Sylow-2-Untergruppe von $\mathbf{Z}(G_m)$, so enthält $\langle H(1, m-1), Z \rangle = H(1, m-1) \times Z$ eine Sylow-2-Untergruppe von G_m, mit [5; V.25.1] folgt $Z \cap G'_m = 1$, und $Z=1$, denn D erzeugt G_m. Nach [4] ist $m_{2'}(PGU(m, 2)) = 3$, so daß $\mathbf{Z}(G_m) \leqq C_3$, denn $[PGU(m, 2) : PSU(m, 2)] = 3$. Da $U(m)$ nach (1.2.3) die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, ist G_m zu $U(m)$ isomorph.

(5) *Es ist* $m \equiv 2(3)$.

Beweis. Ist die Behauptung falsch, so folgt $m = 3s+1$ nach (4). Nach Voraussetzung ist $s \geqq 2$.

Setze $z_s = \prod_{i=0}^{3s-1} y(i)$. Nach (2.d) ist z_s wohldefiniert; nach Induktion ist $z_{s-1} \in \mathbf{Z}(H(1, m-4))$; nach (1) ist $z_s z_{s-1}^{-1} \in \mathbf{Z}(\langle y(3s-3), H(3s-1, 3s+1) \rangle)$. Nun ist nach (2)

$$\begin{aligned} x(3s-2)^{z_s} &= x(3s-2)^{y(3s-5) y(3s-4) y(3s-3)} \\ &= x(3s-2)^{(y(3s-6)^{-1}) t(3s-4) t(3s-3) y(3s-3)} = x(3s-2), \end{aligned}$$

so daß $z_s \in \mathbf{Z}(H(1, m-1))$, und aus $x(m)^{z_s} \neq x(m)$ folgt $H(1, m-1) \simeq U(m-1)$ und $\mathbf{C}_{H(1, m-1)}(x(m)) = H(1, m-2)$.

Setze $D_1 = x(m)^{H(1, m-1)}$, $D_2 = x(m-1)^{H(1, m-2)} \cup \{y(m-1)\}$, $D_3 = x(m-2)^{H(1, m-2)}$ und $D = D_1 \dot{\cup} D_2 \dot{\cup} D_3$. Nach (2.b) ist $y(m-1) \in \mathbf{C}(H(1, m-1))$ und $x(m) y(m-1) x(m) = y(m-1) x(m) y(m-1)$. Es ist $D^{x(i)} = D$ für $1 \leqq i \leqq m-1$. Ferner ist $D_3 \subseteq \mathbf{C}(x(m))$. Nach (2.b) und (2.3.1) ist $S = \langle H(m-2, m), y(m-4) \rangle$ ein epimorphes Bild von $S(4)$, und insbesondere ist $y(m-4) \ldots y(m-1) \in \mathbf{Z}(S)$. Deshalb folgt $D_2^{x(m)} \subseteq D_1$. Nach Induktion ist $3|D| = 2^{m-1}(2^m - (-1)^m)$.

Setze $E_1 = x(m)^{D_2} \cup x(m)^{D_2^{-1}}$, $E_2 = \{x(m)\} \cup x(m)^T$, wobei $T = t(1)^{H(1, m-1)} \setminus (t(1)^{H(1, m-1)} \cap H(1, m-2))$ ist, und $E_3 = \bigcup_{r \in R} x(m)^{x(m-1)^{-1} z^r \langle x(m), y(m-1) \rangle}$, wobei $z = x(m-4)^{t(m-3) t(m-2)}$ und R ein Repräsentantensystem von Rechtsnebenklassen von $\mathbf{C}_{H(1, m-3)}(t(m-4))$ in $H(1, m-3)$ ist.

Es ist $E_1 \subseteq D_1$ und $E_1^{x(m)} \subseteq D_1 \cup D_2$. Seien $z(1), z(2) \in D_2$. Gibt es $a, b \in \{1, -1\}$ mit $z(1)^a z(2)^b \in \mathbf{C}(x(m))$, so folgt

$$z(1)^{x(m)^{-a}} = x(m)^{z(2)^{-b}} = z(2)^{x(m)^b},$$

und $b = -a$, denn sonst wäre $x(m) \in H(1, m-1) \times \langle y(m-1) \rangle$. Also ist $z(1) = z(2)$, und $|E_1| = 2|D_2|$.

Nach Induktion ist $t(1)^{H(1,m-1)}$ eine Konjugiertenklasse von 3-Transpositionen in $H(1,m-1)$, und $H(1,m-2)$ operiert transitiv auf T (vgl. [3]). Nun ist $t(m-2)\in T$. Also folgt $x(m)^T \subseteq \mathbf{C}(x(m))$. Damit ist $E_2 \subseteq D_1$ und $E_2 \cap E_1 = \varnothing$. Seien $v_i \in T$ mit $v_1 \neq v_2$. Dann ist $(u(s-1)v_i)^3 = 1$ nach (3), und $\langle v_1, u(s-1), v_2\rangle$ ist nach [3] ein epimorphes Bild von Σ_4 oder von $S(3)''$. Insbesondere ist $v_1 v_2 \notin \mathbf{C}(u(s-1))$, so daß $v_1 v_2$ nicht mit $x(m)$ vertauschbar ist. Daher folgt $|E_2| = |T|+1$.

Nach (1) ist $L = \langle z, x(m-1), x(m), y(m-1)\rangle$ isomorph zu der in (2.3) beschriebenen Gruppe. Daher ist $\langle x(m)^{x(m-1)^{-1}z}, x(m), y(m-1)\rangle$ zu K aus (2.b) isomorph, und

$$|x(m)^{x(m-1)^{-1}z^r\langle x(m),\, y(m-1)\rangle}| = 12$$

für alle r in R. Nach (1) ist $\langle t(m-4)\rangle = \mathbf{Z}(\langle z, x(m-1)\rangle) = \mathbf{Z}(L)$. Ist $g \in H(1,m-3)$ mit $L \cap L^g > \langle x(m-1), x(m), y(m-1)\rangle$, so folgt $\mathbf{Z}(L) = \mathbf{Z}(L^g)$ nach (2.3), und $g \in \mathbf{C}_{H(1,m-3)}(t(m-4))$. Also ist $L \cap L^g = \langle x(m-1), x(m), y(m-1)\rangle$ für $r \in R \setminus \mathbf{C}_{H(1,m-3)}(t(m-4))$, woraus $|E_3| = 12|R|$ folgt. Die Elemente von E_2 zentralisieren $x(m)$, und $E_3 \cap E_2$ ist leer. Ist $y \in E_1 \setminus \langle x(m), y(m-1)\rangle$, so gibt es ein $g \in H(1,m-2)$ und ein $a \in \{1,-1\}$ mit $y = x(m)^{x(m-1)^a g}$, und $y^{x(m)^a}$ ist mit $y(m-1)$ vertauschbar. Also ist $\langle y, x(m), y(m-1)\rangle$ ein epimorphes Bild von $S(3)$ für alle $y \in E_1$, und $E_3 \cap E_1$ ist leer. Nach Definition von E_3 gilt $E_3^{x(m)} \subseteq E_3$.

Zu zeigen bleibt, daß E_3 in D_1 enthalten ist. Wegen $R \subseteq H(1,m-3)$ und $x(m)^{x(m-1)^{-1}z\langle x(m)\rangle} \subseteq D_1 = D_1^{y(m-1)}$ genügt es zu zeigen, daß die Elemente

$$f_a = x(m)^{x(m-1)^{-1}z\, y(m-1)^a x(m)^a} \quad \text{mit } a \in \{1,-1\}$$

in D_1 enthalten sind. Setze $x = x(m)^{x(m-1)^{-1}z}$. Dann ist $x \in H(m-5,m) \simeq U(6)$, woraus folgt, daß $t(m-3)^{t(m-5)}$ und $x(m-3)$ mit x vertauschbar sind. Nach (1) ist $H = \langle H(m-4,m), y(m-1)\rangle$ ein epimorphes Bild von $U(6)$, und in H rechnet man nach, daß es zu a ein $b \in \{1,-1\}$ gibt mit $\mathbf{Z}(\langle y(m-4)^{t(m-4)t(m-3)x(m-3)^b}, x(m-4)\rangle) = \mathbf{Z}(\langle x(m), x^{y(m-1)^a}\rangle)$. Deshalb ist

$$\langle x(m), x^{y(m-1)^a}, x(m-2), y(m-4)^{t(m-4)t(m-3)x(m-3)^b}, x(m-4)\rangle$$

zu $U(4)$ isomorph, woraus folgt, daß $x^{y(m-1)^a}$ zu f_a in $H(1,m-2)$ konjugiert ist.

Also ist $E_1 \dot\cup E_2 \dot\cup E_3 = E \subseteq D_1$, und aus $|E| = |D_1|$ folgt $E = D_1$. Damit ist D eine Konjugiertenklasse in G_m, und wie in (4) folgt, daß G_m zu $U(m)$ isomorph ist.

(6) *Nach* (5) *ist* $m = 3s+2$. *Setze* $z(3s) := x(m)$, $z(i) := z(i+1)^{t(i+1)u(i-2)}$ *für* $i \equiv 2(3)$, $z(i) := z(i+2)^{t(i+2)}$ *für* $i \equiv 1(3)$ *und* $z(i) := z(i+3)^{t(i+3)t(i+2)}$ *für* $i \equiv 0(3)$, *wobei* $0 \leqq i \leqq 3s-1$ *ist. Dann gilt:*

(a) $z(i) \in H(i+2,m)$ *für* $i \not\equiv 2(3)$, $z(i) \in \langle H(i,m), y(i-2)\rangle$ *für* $i \equiv 2(3)$, *und* $\langle y(i), z(i)\rangle$ *ist zu* $\langle y(3s), z(3s)\rangle$ *konjugiert;*

(b) *ist* $i \equiv 0(3)$, *so ist* $H(1,i) \times H(i+3,m) \leqq \mathbf{C}(z(i))$ *und* $\langle z(i), H(i+1,i+2)\rangle$ *ist ein epimorphes Bild von* K *aus* (2.b);

(c) *ist* $i \equiv 2(3)$, *so ist* $H(1,i-1) \times H(i+3,m) \leqq \mathbf{C}(z(i))$ *und* $z(i)x(j)z(i) = x(j)z(i)x(j)$ *für* $i \leqq j \leqq i+2$;

(d) *ist* $i \equiv 1(3)$, *so ist* $H(1,i) \times \langle x(i+2)\rangle \times H(i+4,m) \leqq \mathbf{C}(z(i))$ *und* $z(i)x(j)z(i) = x(j)z(i)x(j)$ *für* $j \in \{i+1, i+3\}$;

(e) *es ist* $[z(i), z(j)] = 1 = [z(i), y(k)]$ *für alle* $k \neq i$ *und alle* j.

Beweis. (a) folgt aus der Definition von $z(i)$, aus (2) und (3).

Sei $i\equiv 0(3)$. Nach (1) und (a) ist (b) für $i\geqq 3s-3$ richtig. Nach Induktion und (1) ist $\langle z(i+3), H(i+1, i+4)\rangle$ ein epimorphes Bild von $U(5)$, woraus folgt, daß $\langle z(i), H(i+1, i+2)\rangle$ ein epimorphes Bild von K und $H(i+3, i+4)\times H(i+6, m)\leqq \mathbf{C}(z(i))$ ist. Für $\langle v\rangle = \mathbf{Z}(\langle x(i+4), z(i+3)\rangle)$ gilt

$$\begin{aligned}&[z(i), x(i+5)]\sim[z(i+3)^{t(i+3)}, x(i+5)]\\&\quad=[x(i+3)^{v}, x(i+5)]\sim[x(i+3), x(i+5)]=1\end{aligned}$$

nach Induktion, und mit (a) folgt (b).

Sei $i\equiv 2(3)$. Aus (b) und (3.a) folgt $H(1, i-1)\times H(i+4, m)\leqq \mathbf{C}(z(i))$. Nach Definition von $z(i)$ folgt $\langle z(i), x(i)\rangle\sim\langle z(i+1), x(i+2)\rangle\sim\langle z(i), x(i+2)\rangle$, $\langle z(i), x(i+1)\rangle\sim\langle z(i+1), y(i+1)\rangle$ und $[z(i), x(i+3)]\sim[z(i+1), x(i+1)]=1$. Also gilt (c).

Sei $i\equiv 1(3)$. Nach Definition von $z(i)$ und Induktion folgt $H(1, i)\times\langle x(i+2)\rangle\times H(i+5, m)\leqq \mathbf{C}(z(i))$ nach (b) und $z(i)x(i+3)z(i)=x(i+3)z(i)x(i+3)$. Ferner gilt $\langle z(i), x(i+1)\rangle\sim\langle z(i+2), x(i+3)\rangle$ nach (b). Also ist (d) richtig.

Ist $i<j$, so folgt $y(3i)\in H(1, 3i+1)\leqq \mathbf{C}(z(3j))$ nach (2.b) und (b), so daß $[y(3i), z(3j)]=1$. Ist $j<i-1$, so folgt $t(3j+3), t(3j+2)\in \mathbf{C}(y(3i))$ nach (2.b), und $[z(3j), y(3i)]\sim[z(3j+3), y(3i)]$. Ist $j=i-1$, so folgt $[y(3i), z(3i-3)]\sim[y(3i-3), z(3i)]$. Nun ist $[y(0), z(3)]=1$ nach (b), und mit Induktion folgt $[y(3i), z(3j)]=1$ für alle $i\neq j$. Aus $[y(3i+1), z(3j)]\neq 1$ folgte $i+1>j$ nach (2.b) und (b), aus $i>j$ folgte $[t(3i+2), z(3j)]=1$ nach (b) und $[y(3i+1), z(3j)]\sim[y(3i), z(3j)]=1$. Also wäre $i=j$, und $[y(3i+1), z(3i)]\sim[y(3i+3), z(3i)]=1$, ein Widerspruch. Nach (b) ist $1=[x(3i+3), z(3j)]=[y(3i+2), z(3j)]$. Also ist $[y(i), z(3j)]=1$ für alle $i\neq 3j$. Aus $[y(i), z(3j+1)]\neq 1$ folgte $3j<i+1$ nach (d), und wegen $[y(i), z(3j+1)]=[y(i), z(3j)^{t(3j+2)}]$ und $t(3j+2)\notin \mathbf{C}(y(i))$ folgte $i\in\{3j, 3j+1\}$ nach (2). Für diese Fälle rechnet man nach, daß $y(i)$ mit $z(3j+1)$ vertauschbar ist. Wäre schließlich $[y(i), z(3j+2)]\neq 1$, so folgte $3j<i+1$ aus (c) und (2). Es ist $z(3j+2)=z(3j)^{t(3j+2)u(3j)}$. Sei $u(3j)\in \mathbf{C}(y(i))$. Dann folgte $t(3j+2)\notin \mathbf{C}(y(i))$, und $3j\leqq i\leqq 3j+1$. Wegen $y(3j+1)=y(3j)^{t(3j+2)}=x(3j+3)^{u(3j)}$ folgte $3j=i$, und $[y(3j), z(3j+2)]\sim[y(3j+3), z(3j)]=1$. Also ist $u(3j)\notin \mathbf{C}(y(i))$, und nach (2) und (3) folgt $i=3j+1$. Aber $[y(3j+1), z(3j+2)]=[y(3j)^{t(3j+2)}, z(3j)^{t(3j+2)u(3j)}]\sim[x(3j+3), z(3j)]=1$ nach (b). Sei $i<j$ und $[z(i), z(j)]\neq 1$. Aus (a), (b) und (c) folgt $i+1\leqq j\leqq i+3$. Für diese Fälle rechnet man $[z(i), z(j)]=1$ nach. Damit gilt (e).

(7) *G_m ist kein Gegenbeispiel.*

Beweis. Setze $M(i)=\mathbf{O}_2(\langle y(i), z(i)\rangle)$ für $0\leqq i\leqq 3s$. Aus (6.e) folgt $[M(i), M(j)]=1$ für $i\neq j$. Nach (6.a) und (3.a) ist $M(i)'=M(j)'\leqq \mathbf{Z}(G_m)$ für alle i und j.

Mit $M=\langle M(i); 0\leqq i\leqq 3s\rangle$ ist $G_m=\langle M, H(1, m-1)\rangle$ wegen $y(3s)\in H(1, m-1)$. Ist $i\equiv 0(3)$, so folgt $M(j)\leqq \mathbf{C}(x(i))$ für $j\neq i-1$ und $\langle y(i-1), z(i-1)\rangle = M(i-1)\langle x(i)\rangle$. Ist $i\equiv 1(3)$, so folgt $M(j)\leqq \mathbf{C}(x(i))$ für $j\notin\{i-1, i-2, i-3\}$, und $M(i-1)M(i-2)M(i-3)=\mathbf{O}_2(\langle x(i-1), x(i), y(i-1), z(i-1)\rangle)$ nach (2.3); ist $i\equiv 2(3)$, so folgt $M(j)\leqq \mathbf{C}(x(i))$ für $j\notin\{i, i-1, i-2\}$, und $M(i)M(i-1)M(i-2)=\mathbf{O}_2(\langle x(i+1), x(i), y(i-2), z(i-2)\rangle)$ nach (2.3). Damit ist M ein Normalteiler von G_m, und nach (1.2.3) erfüllt $U(m)$ die Voraussetzungen des Satzes. Also ist G_m zu $U(m)$ isomorph.

Literatur

1. Aschbacher, M., Hall, M. Jr.: Groups generated by a class of elements of order 3. J. Algebra **24**, 591–612 (1973)
2. Coxeter, H.S.M.: Factor groups of the braid group. In: Proceedings of the Fourth Canadian Mathematical Congress (Vancouver 1957), pp. 95–122
3. Fischer, B.: Finite groups generated by 3-transpositions. Warwick: University of Warwick 1970
4. Griess, R.: Schur multipliers of the known finite simple groups. Bull. Amer. Math. Soc. **78**, 68–71 (1972)
5. Huppert, B.: Endliche Gruppen I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
6. Mehl, W.: Ein Vergleich verschiedener Todd-Coxeter-Algorithmen. Diplomarbeit, Aachen 1970
7. Moore, E.H.: Concerning the abstract groups of order $k!$ and $\frac{1}{2}k!$ holoedrically isomorphic with the symmetric and the alternating substitution-groups on k letters. Proc. London Math. Soc. **28**, 357–366 (1897)
8. Scott, W.R.: Group theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall 1964
9. Stellmacher, B.: Eine Kennzeichnung der Gruppen $PSp(2n, 3)$ und $PGU(n, 2)$. Diplomarbeit, Bielefeld 1970

Eingegangen am 8. Juli 1978