UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

Examen Cálculo I

Tiempo: 140 minutos. Sábado, 5 de Diciembre de 2015.

Nombre .... **Sección** ....

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	6	
9	6	
TOTAL	54	

Atención:

-Cada respuesta debe ser justificada con claridad.

-Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.

- Durante el desarrollo de la evaluación ningún alumno puede salir de la sala.

-El alumno que sea sorprendido usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en dicha prueba.

1. Considere la siguiente función $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x - 1| + 3$$

Graficar f e indicar su recorrido.

2. Dadas las funciones

$$f(x) = \sqrt{3 - |x|} \qquad y \qquad g(x) = \begin{cases} x - 1 & ; x > 2 \\ x^2 & ; x \leq 2 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de la función g.

b) Determine $g \circ f$, indicando su dominio.

3. Calcular los siguientes límites, si es que existen.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{|x-2|-1}{\sqrt{x-3}}$

   Solución

   Como numerador y denominador tienden ambos a 0, se reescribe la expresión:

   $$\lim_{x\to 3^+} \frac{|x-2|-1}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-2)-1}{\sqrt{x-3}}$$

   (ya que $x-3>0$ y $\therefore x-2>0$)

   $$= \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$$

   También se puede obtener por L'Hôpital:

   $$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x-3}} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x-3}}} = \lim_{x\to 3^+} 2\sqrt{x-3} = 0$$

   Criterios:

   - **(2 puntos) por decidir el valor absoluto**
   - **(3 puntos) por transformar la función en una función continua (sea por L'Hôpital o algebraicamente)**
   - **(1 punto) por obtener el valor del límite**

   b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^2+x+1}{3x^5-2x^2+12x-45}$

   Solución

   Como numerador tiende a $+\infty$ y denominador tiende a $-\infty$, usamos L'Hôpital las veces necesarias hasta decidir:

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^2+x+1}{3x^5-2x^2+12x-45} &\underset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{10x+1}{15x^4-4x+12} \\ &\underset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{10}{60x^3-4} = 0\end{aligned}$$

Criterios:

- **(1 punto) por establecer la forma indeterminada**
- **(2 puntos) por aplicar L'Hôpital (o por dividir numerador y denominador por x^5)**
- **(2 puntos) por volver a aplicar L'Hôpital (o bien reescribir la fracción) para obtener una expresión a la que aplicar límite directamente**
- **(1 punto) por obtener el valor del límite**

4. Determine la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{e^{3x^2}}{x^2+1}$

Solución

$$f'(x) = \left(\frac{e^{3x^2}}{x^2+1}\right)' = \frac{\left(e^{3x^2}\right)' \cdot (x^2+1) - e^{3x^2} \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{\left(e^{3x^2}\right) \cdot 6x \cdot (x^2+1) - e^{3x^2} \cdot (2x)}{(x^2+1)^2}$$

Criterios:

- **(2 puntos) por aplicar derivada de cociente**
- **(2 puntos) por derivar la exponencial con regla de la cadena**
- **(2 puntoss) por derivar el polinomio del denominador de f**

b) $g(x) = \operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}))$

Solución

$$g'(x) = \left(\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}))\right)' = \cos\left(\ln(\sqrt{x})\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\left(\ln(\sqrt{x})\right)}{2x}$$

Criterios:

- **(3 puntos) por aplicar la regla de la cadena correctamente (las veces necesarias)**
- **(3 puntos) por aplicar derivadas trigonométricas, de logaritmo y de raíz**

5. Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ definida e invertible en el intervalo $]-\infty, 1/3]$. Determinar el valor de $(f^{-1})'(1)$

6. Los ahorros S de un país se definen implícitamente en términos de su ingreso nacional I por medio de la ecuación

$$S^2 + \frac{1}{4}I^2 = SI + I$$

donde S y I están medidos en miles de millones de dólares.

Encuentre e interprete $\dfrac{dS}{dI}$, cuando $I = 16$ y $S = 12$.

7. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = 1$.

8. Determine los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 18x^2 + 60x$ en el intervalo $[-1, 12]$

9. Un fabricante de radios advierte que x aparatos pueden venderse por semana a p dólares cada uno, en donde la demanda está dada por $p = -\frac{5}{3}x + \frac{375}{3}$. El costo total de producción es $500 + 13x + \frac{1}{5}x^2$ dólares. Encuentre la cantidad de aparatos que se necesitan vender para obtener una utilidad máxima.