

Agronomia - 1º Semestre / 2023

Matemática Para Agronomia - Professor Me. Leomir A. S. Grave

Aula 09 - 12/06/2023 - Função Exponencial

Definição

Dado um número real a , tal que $0 < a \neq 1$, chamamos função exponencial de base a a função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} que associa a cada x real o número a^x .

Exemplos de funções exponenciais em \mathbb{R} :

1º) $f(x) = 2^x$

2º) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3º) $h(x) = 3^x$

4º) $p(x) = 10^x$

5º) $r(x) = (\sqrt{2})^x$

Propriedades

1º) Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$$

Isto é, o par ordenado $(0, 1)$ pertence à função para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Isto significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

2º) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrecente) se, e somente se, $a > 1$ ($0 < a < 1$). Portanto, dados os reais x_1 e x_2 , temos:

I) Quando $a > 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

II) Quando $0 < a < 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3º) A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é injetora, pois, dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$ (por exemplo $x_1 < x_2$), vem:

I) Se $a > 1$, temos: $f(x_1) < f(x_2)$;

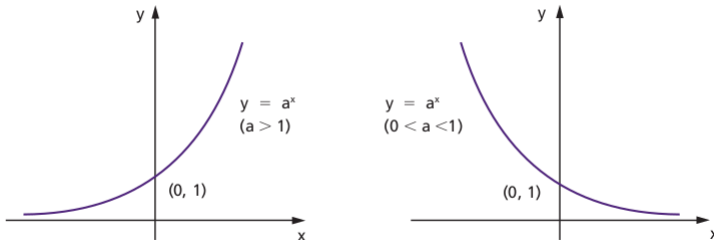
II) Se $0 < a < 1$, temos: $f(x_1) < f(x_2)$;

E, portanto, nos dois casos, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, podemos dizer:

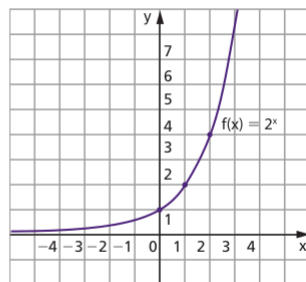
- 1°) A curva representativa está toda acima do eixo dos x , pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- 2°) Corta o eixo y no ponto de ordenada 1;
- 3°) se $a > 1$ é o gráfico de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o gráfico de uma função decrescente;
- 4°) Toma um dos aspectos das figuras abaixo.



Exemplos:

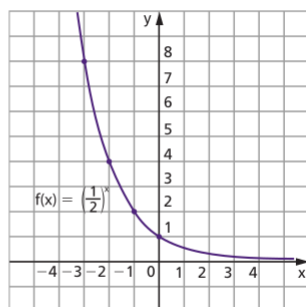
1°) Construir o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$.

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



2°) Construir o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



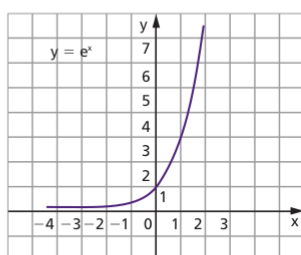
3°) Construir o gráfico da função exponencial de base e , $f(x) = e^x$.

Um número irracional importantíssimo para a análise matemática é indicado pela letra e e definido pela relação:

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$(1+1)^1=2$	$(1+0,1)^{10}=2,594$	$(1+0,01)^{100}=2,705$	2,717	2,7182	2,7183

x	e^x
-3	0,05
-2,5	0,08
-2	0,14
-1,5	0,22
-1	0,36
-0,5	0,60
0	1
0,5	1,65
1	2,72
1,5	4,48
2	7,39
2,5	12,18
3	20,80



Equações Exponenciais

Equações Exponenciais são equações com incógnita no expoente.

Método da redução a uma base comum

Este método, como o próprio nome já diz, será aplicado quando ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base a

$$(0 < a \neq 1)$$

. Pelo fato de a função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, isto é:

$$a^b = a^c \iff b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

Exemplos:

Encontre os valores de x que satisfazem as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$

Resposta: $x = 6$

b) $8^x = \frac{1}{32}$

Resposta: $x = -\frac{5}{3}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

Resposta: $x = -\frac{8}{3}$

d) $(2^x)^{x-1} = 4$

Resposta: $x = 2$ e $x = -1$

e) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$

Resposta: $x = -\frac{4}{5}$

f) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[3]{25^{2x-5}} - \sqrt[2]{5^{3x-2}} = 0$

Resposta: $x = 3$

g) Resolva a equação exponencial: $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$

Resposta: $x = 4$

Inequações Exponenciais

São as inequações com incógnitas no expoente.

Se b e c são números reais, então:

Para $a > 1$ tem-se $a^b > a^c \iff b > c$

Para $0 < a < 1$ tem-se $a^b > a^c \iff b < c$

Exemplos:

a) $2^x > 128$

Resposta: $x > 7$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{125}{27}$

Resposta: $x \leq -3$

c) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8}$

Resposta: $x < \frac{9}{4}$

d) $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27}$

Resposta: $x < \frac{1}{2}$ ou $x > 3$

e) $\left(\frac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

Resposta: $\frac{1}{5} \leq x \leq 1$

f) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3$

Resposta: $x < -2$ ou $x > 1$

g) $2^x - 1 > 2^{1-x}$

Resposta: $x > 1$