INSTITUTO FEDERAL
Rio Grande do Sul

Aula 1
Revisão de Derivadas

Ministério da Educação

Licenciatura em Matemática – 11/08/2023

Cálculo Diferencial e Integral III – Professor Me. Leomir A. S. Grave

Notações para a Derivada

O processo de encontrar uma derivada é chamado derivação ou diferenciação. Podemos pensar na derivação como uma operação sobre funções, que associa a função f' a uma função f. Quando a variável independente for x, a operação de derivação também costuma ser denotada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

.

No caso em que também temos a variável dependente $y = f(x)$, a derivada costuma ser denotada por

$$f'(x) = y'(x)$$

ou

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Resumo das Regras de Derivação

As regras de derivação são:

1. Derivada de uma constante:

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

2. Derivada da soma de duas funções:

$$\frac{d}{dx}(f + g) = f' + g'$$

3. Derivada do produto de duas funções:

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = f \cdot g' + g \cdot f'$$

4. Derivada de uma constante multiplicando uma função:

$$\frac{d}{dx}(cf) = c \cdot f'$$

5. Derivada da diferença de duas funções:

$$\frac{d}{dx}(f-g) = f' - g'$$

6. Derivada do quociente de duas funções:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

7. Derivada de uma função elevada a uma potência constante:

$$\frac{d}{dx}(x^r) = r \cdot x^{r-1}$$

Exemplos

Calcule a derivada da função $f(x)$: (a) multiplicando e então derivando e depois (b) usando a regra do produto. Verifique que (a) e (b) dão o mesmo resultado.

1) $f(x) = (x+1)(2x-1)$

2) $f(x) = (3x^2-1)(x^2+2)$

3) $f(x) = (x^2+1)(x^2-1)$

4) $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)$

Derivadas Trigonométricas

1. Derivada do seno:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

2. Derivada do cosseno:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

3. Derivada da tangente:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

Para mais fórmulas, veja o Manual de Fórmulas Disponível no Repositório Página 73. (QR Code)

Exemplo

Suponha que o Sol nascente passe diretamente sobre um prédio de 30 metros de altura e seja θ o ângulo de elevação do Sol (Figura). Encontre a taxa segundo a qual o comprimento x da sombra do prédio está variando em relação a θ, quando $\theta = 45°$. Expresse a resposta em metros/graus.

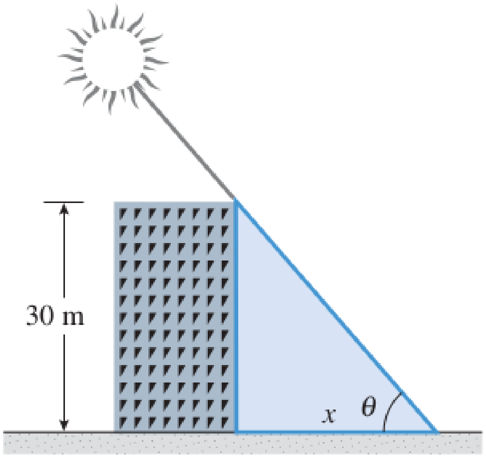


Figura 1: Ilustração do prédio e o ângulo de elevação do Sol.

Solução:

As variáveis x e θ estão relacionadas por $\tan\theta = \frac{30}{x}$, ou, de forma equivalente, $x = 30\cot\theta$. Se θ for medido em radianos, aplicando a fórmula, resultando em $\frac{dx}{d\theta} = -\frac{30}{\sin^2\theta}$, que é a taxa de variação do comprimento da sombra em relação ao ângulo de elevação em metros/radianos.

Quando $\theta = 45°$ (ou, de forma equivalente, $\theta = \frac{\pi}{4}$ radianos), $\frac{dx}{d\theta} = -\frac{30}{\sin^2\frac{\pi}{4}} = -60m/rad$ convertendo para graus, obtemos $\frac{dx}{d\theta} \approx -1.05$ m/grau, o que significa que o comprimento da sombra está decrescendo (devido ao sinal negativo) a uma taxa aproximada de 1,05 metros por grau, com o aumento do ângulo de elevação.

Regra da Cadeia

Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição $f \circ g$ será diferenciável no ponto x. Além disso, se $y = f(g(x))$ e $u = g(x)$, então $y = f(u)$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

onde $\frac{dy}{du}$ representa a derivada de f em relação a u e $\frac{du}{dx}$ representa a derivada de g em relação a x. Isso é conhecido como a regra da cadeia para derivadas.

Exemplo

Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = \cos(x^3)$.

Solução

Passo 1: Encontre $\frac{dy}{du}$

$$y = \cos(u)$$

$$\frac{dy}{du} = -\sin(u)$$

Passo 2: Encontre $\frac{du}{dx}$

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

Agora, aplique a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\sin(u)) \cdot (3x^2) = -3x^2 \sin(x^3)$$

Portanto, a derivada $\frac{dy}{dx}$ da função $y = \cos(x^3)$ usando a regra da cadeia é $-3x^2 \sin(x^3)$.

Uma Versão Alternativa da Regra da Cadeia

Uma maneira conveniente de lembrar essa fórmula consiste em chamar f a "função de fora" e g a "função de dentro" na composição $f(g(x))$ e, então, expressar a regra da cadeia como:

A derivada de $f(g(x))$ é a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada da função de dentro}}$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg}^2 x] = \frac{d}{dx}[(\operatorname{tg} x)^2] = \underbrace{(2 \operatorname{tg} x)}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{(\sec^2 x)}_{\text{Derivada da função de dentro}} = 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$$

Crescimento, Decrescimento e Concavidade

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b).

(a) Se $f'(x) > 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é crescente em $[a, b]$.

(b) Se $f'(x) < 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é decrescente em $[a, b]$.

(c) Se $f'(x) = 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é constante em $[a, b]$.

Exemplo

Encontre os intervalos nos quais $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente.

Solução:

Para encontrar os intervalos nos quais a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é crescente ou decrescente, precisamos analisar o sinal da derivada $f'(x)$.

Primeiro, calculamos a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 3) = 2x - 4$$

Agora, precisamos encontrar os valores de x onde $f'(x)$ é positiva e negativa para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

Para $f'(x) > 0$:

$$2x - 4 > 0$$

Simplificando e resolvendo a desigualdade para x:

$$2x > 4 \implies x > 2$$

Portanto, a função é crescente para $x > 2$.

Para $f'(x) < 0$:

$$2x - 4 < 0$$

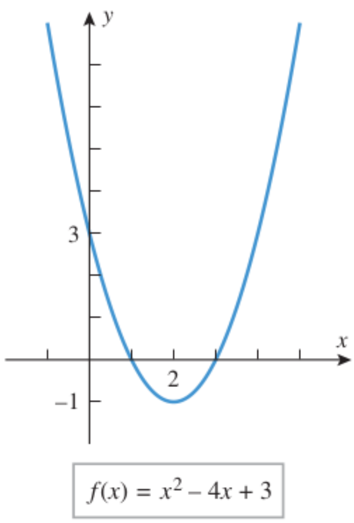
Simplificando e resolvendo a desigualdade para x:

$$2x < 4 \implies x < 2$$

Portanto, a função é decrescente para $x < 2$.

Em resumo, a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é crescente no intervalo $[2, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 2]$.

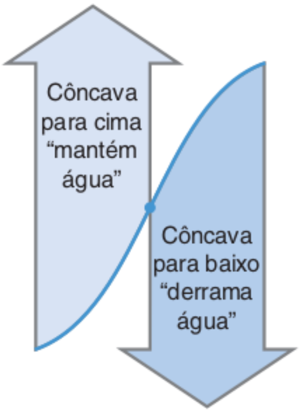
Gráfico



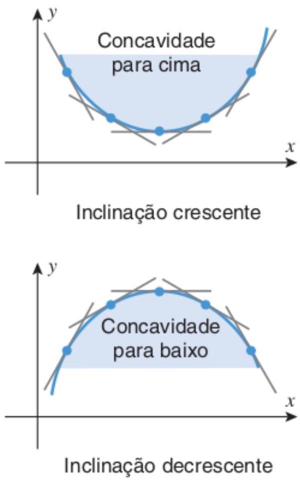
Concavidade

Se f for diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que fé côncava para cima no intervalo aberto se f' for crescente nesse intervalo, e dizemos que f é côncava para baixo no intervalo aberto se f' for decrescente nesse intervalo.

Esquema



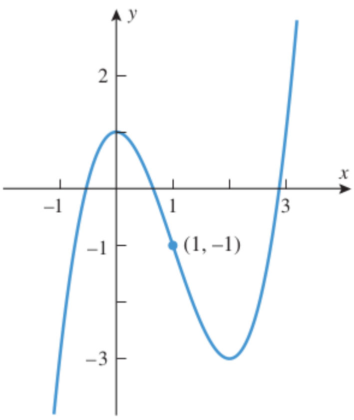
Representação das Retas Tangentes



Exemplo

A Figura mostra o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Use as derivadas primeira e segunda de f para determinar os intervalos nos quais f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize todos os pontos de inflexão e confirme que suas conclusões são consistentes com o gráfico.

Figura



$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Solução:

Calculando as derivadas primeira e segunda de f, obtemos

$f'(x) = 3x(x - 2)$

$f''(x) = 6(x - 1)$

A análise de sinais dessas derivadas é mostrada nas tabelas seguintes:

Tabelas

INTERVALO	$(3x)(x-2)$	$f'(x)$	CONCLUSÃO
$x < 0$	$(-)(-)$	$+$	f é crescente em $(-\infty, 0]$
$0 < x < 2$	$(+)(-)$	$-$	f é decrescente em $[0, 2]$
$x > 2$	$(+)(+)$	$+$	f é crescente em $[2, +\infty)$

INTERVALO	$6(x-1)$	$f''(x)$	CONCLUSÃO
$x < 1$	$(-)$	$-$	f é côncava para baixo em $(-\infty, 1)$
$x > 1$	$(+)$	$+$	f é côncava para cima em $(1, +\infty)$